4. Einmassenschwinger

Ein schwingungsfähiges System mit nur einer unabhängigen Bewegungsmöglichkeit wird als Schwinger mit einem Freiheitsgrad bezeichnet. Hierbei kann es sich sowohl um eine translatorische als auch um eine rotatorische Bewegung handeln.

Viele praktisch vorkommende Fälle lassen sich mit guter Näherung auf den Systeme mit einem Freiheitsgrad zurückführen.

4.1 Freie Schwingung

Das Schwingungsverhalten eines Systems, dass nach anfänglicher Auslenkung oder nach einem Kraftstoß sich selbst überlassen bleibt, wird als freie Schwingung bezeichnet.

Als typische Beispiele für die freie Schwingung lässt sich das Anschlagen einer Stimmgabel oder die durch einen geworfenen Stein hervorgerufene Wellenbildung auf der Oberfläche eines Sees anführen.

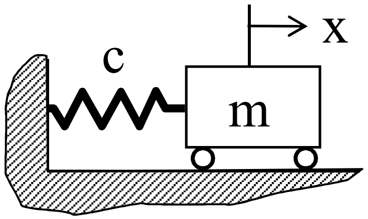
4.1.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

Bei der freien, ungedämpften Schwingung klingt die Bewegung mit der Zeit nicht ab. Sie stellt eine Idealisierung realer Bewegungsabläufe dar.

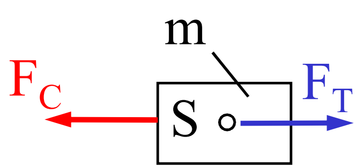
Die Bewegungsgleichung lässt sich durch ein Feder-Masse-Systems aufstellen. Zu jedem Zeitpunkt t müssen sich Federkraft F_C und Trägheitskraft F_T aufheben. Die dynamische Grundgleichung in der Form von d‘ Alembert lautet

$$\sum F_x = 0 = F_T - F_C$$

System



Freikörperbild



Die Trägheitskraft $F_T = -m \cdot \ddot{x}$ ist der Beschleunigung stets entgegengerichtet. Mit der Federkraft $F_C = c \cdot x$ folgt

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0$$

Hierbei ist m die Masse in kg, die Federsteifigkeit c in N/m bzw. kg/s², der Federweg in m und die Beschleunigung $\ddot{x}$ in m/s² einzusetzen

Aus der Umformung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$$

folgt mit der Definition der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

die Differentialgleichung der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Es handelt sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung führt auf die allgemeine harmonische Funktion

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

mit den Integrationskonstanten A und B, die von den Anfangsbedingungen Weg und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ abhängen.

Die Ableitung der Bewegungsgleichung liefert die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

nochmalige Ableitung die Beschleunigung

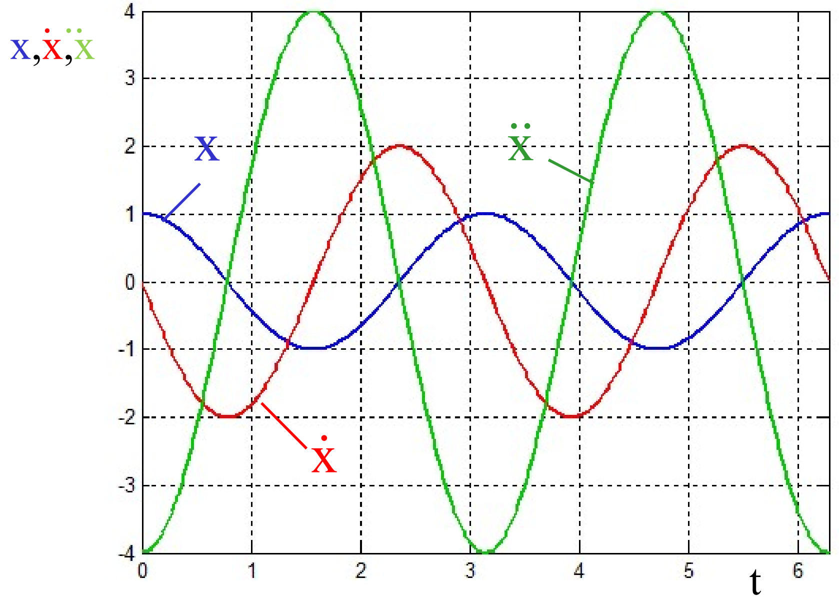
$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - B \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Wird das System ausgelenkt und losgelassen, gilt für den Weg $x(t{=}0) = x_0 = A$ und für die Geschwindigkeit $\dot{x}(t{=}0) = 0 = B$ und damit

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$



Die Geschwindigkeit ist um π gegenüber dem Weg phasenverschoben, sie ist maximal beim Durchgang durch die Ruhelage. Die Beschleunigung wirkt entgegengesetzt zum Weg und besitzt in den Umkehrpunkten Extremwerte.

Die allgemeine Lösung lässt sich auch schreiben in der Form

$$x(t) = \hat{A} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha_0)$$

mit der Amplitude $\hat{A}$ und dem Nullphasenwinkel α_0. Zwischen den Größen bestehen folgende Beziehungen:

$$A = x(t=0) = x_0 \qquad B = \dot{x}(t=0) = v_0/\omega_0$$

$$\hat{A} = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \tan\alpha_0 = A/B$$

Die Eigenfrequenz ergibt sich aus

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

und hängt von der Steifigkeit c und der Masse m des Systems ab.

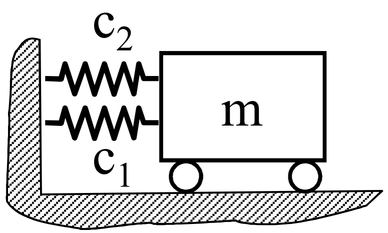
Je größer die Steifigkeit und je kleiner die Masse, umso größer ist die Frequenz, mit der das System schwingt und umgekehrt.

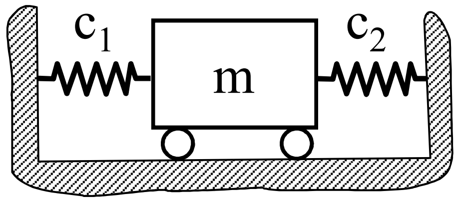
4.1.1.1 Anordnung der Federn

Greifen mehrere Federn an einem Einmassensystem an, ist zu unterscheiden:

Parallelschaltung:

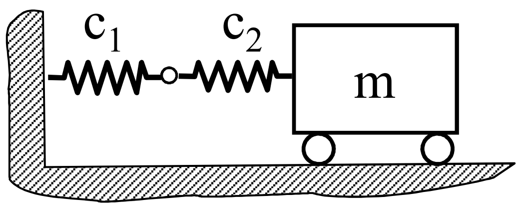
$$c_{ges} = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$$





Reihenschaltung:

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$$



Beispiel : Masse mit zwei Federn in Reihenschaltung

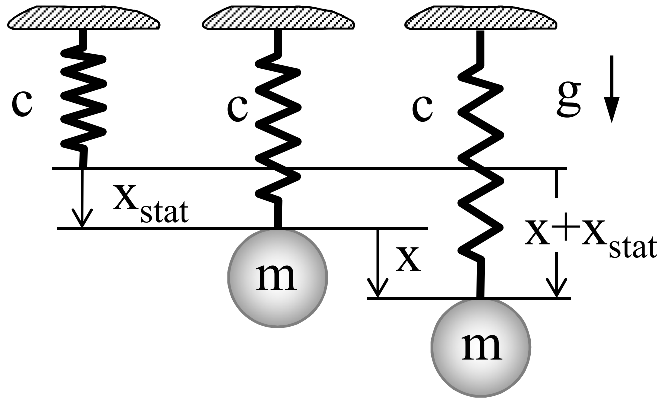
Gegeben: Steifigkeit $c_1 = 6$ N/mm, $c_2 = 12$ N/mm, Masse m = 10 kg

Gesucht: Eigenfrequenz ω_0

4.1.1.2 Statische Gleichgewichtslage

Wirkt auf ein Feder-Masse-System eine konstante Gewichtskraft, ergibt sich aus dem statische Gleichgewicht:

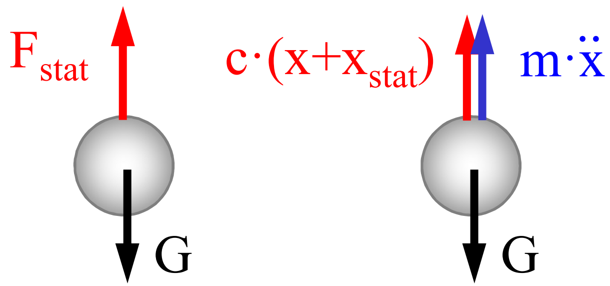
$$\sum F_x = 0 = G - F_{stat} = G - c \cdot x_{stat} \quad \Rightarrow G = c \cdot x_{stat}$$



Wird das System durch die bewegte Masse zusätzlich ausgelenkt, lautet das dynamische Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 = G - m \cdot \ddot{x} - c \cdot (x + x_{stat})$$

$$\Rightarrow G - m \cdot \ddot{x} - c \cdot x - c \cdot x_{stat} = 0$$



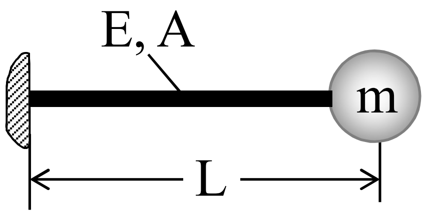
Einsetzen der Gewichtskraft führt auf

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$$

Bei linearer Federkennlinie hat die Gewichtskraft keinen Einfluss auf das Schwingverhalten. Die Masse schwingt um die statisch Gleichgewichtslage.

4.1.1.3 Längsschwingung

Wird bei einem Einmassenschwinger die Feder durch einen homogenen, masselosen Stab mit linear-elastischem Materialverhalten ersetzt, ergibt sich dessen die axiale Steifigkeit



$$c = \frac{E \cdot A}{L}$$

Für die Masse m folgt die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{E \cdot A}{m \cdot L}}$$

wobei A die Querschnittsfläche, L die Länge und dem E der Elastizitätsmodul des Stabes ist.

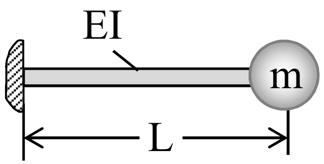
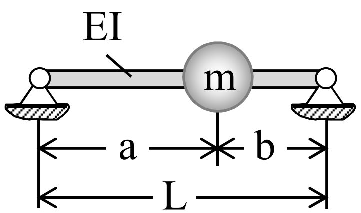
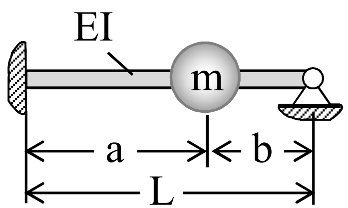
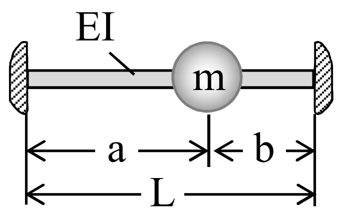
Beispiel : Längsschwingung

Gegeben: Länge L = 500 mm, A = 50 mm², E = 200000 N/mm², Masse m = 10 kg

Gesucht: Eigenkreisfrequenz ω_0 und Eigenfrequenz f_0

4.1.1.4 Biegeschwingung

Ist das elastische Element eines Einmassenschwingers ein Biegebalken, ist die Eigenfrequenz der Biegeschwingung abhängig von der Lagerung.

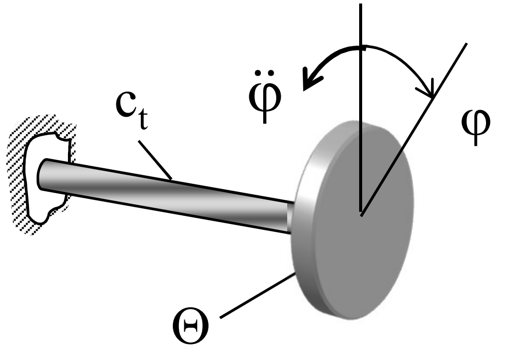
	Einspannung	Gelenklager	Einspannung + Gelenklager	Doppelein-spannung
La-ger-ung				
Ei-gen-kreis-fre-quenz	$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{m \cdot L^3}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI \cdot L}{m \cdot a^2 \cdot b^2}}$ für a = b: $\omega_0 = \sqrt{\frac{48EI}{m \cdot L^3}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI \cdot L^3}{m \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot (3L+a)}}$ für a = b: $\omega_0 = \sqrt{\frac{768EI}{7m \cdot L^3}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI \cdot L^3}{m \cdot a^3 \cdot b^3}}$ für a = b: $\omega_0 = \sqrt{\frac{192EI}{m \cdot L^3}}$

Hierbei wird das Produkt aus dem Elastizitätsmodul E und dem axialen Flächenträgheitsmoment I als Biegesteifigkeit EI bezeichnet.

4.1.1.5 Torsionsschwingung

Ersetzt man in der dynamischen Grundgleichung des Einmassenschwingers die translatorischen Größen durch die rotatorischen Größen Drehwinkel φ, Drehsteifigkeit c_t und Massenträgheitsmoment Θ, ergibt sich

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_t}{\Theta} \cdot \varphi = 0$$



mit der der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_t}{\Theta}}$$

Die Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen lautet somit

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$$

Sie hat die Lösung

$$\varphi(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha_0)$$

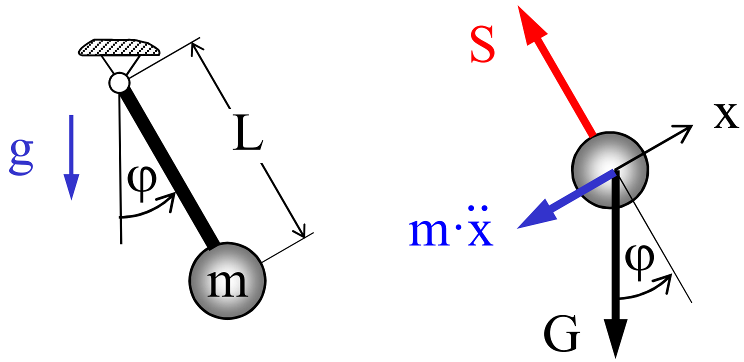
mit der Drehamplitude $\hat{A}$ und dem Nullphasenwinkel α_0.

4.1.1.6 Pendelschwingung

Ein **Pendel** ist ein Körper, der an einem Punkt außerhalb seines Schwerpunktes drehbar gelagert ist und nach Auslenkung unter dem Einfluss der Schwerkraft um seine Ruheposition schwingt. Die Gewichtskraft wirkt als Rückstellkraft.

9.1.1.6.1 Mathematisches Pendel

Beim mathematischen Pendel wird idealisierend angenommen, dass die gesamte Masse des Pendels in einem Punkt vereinigt ist, der einen festen Abstand vom Aufhängepunkt hat.



Das dynamische Gleichgewicht liefert:

$$\sum F_x = 0 = -G_x - m \cdot \ddot{x}$$

Mit $G_x = m \cdot g \cdot \sin\varphi$ und $\ddot{x} = L \cdot \ddot{\varphi}$ folgt

$$m \cdot L \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin\varphi = 0$$

Es handelt sich hierbei um eine nichtlineare Differentialgleichung, die nur numerisch gelöst werden kann.

Für kleine Winkel gilt jedoch $\sin\varphi \approx \varphi$ und man erhält damit die linearisierte Differentialgleichung der Pendelschwingung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \varphi = 0$$

mit der Eigenkreisfreqenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Die Schwingung des mathematischen Pendels im Schwerefeld ist nur von der Pendellänge abhängig, nicht jedoch von der Masse. Für kleine Auslenkungen führt das Pendel eine harmonische Bewegung aus.

Beispiel : Mathematisches Pendel

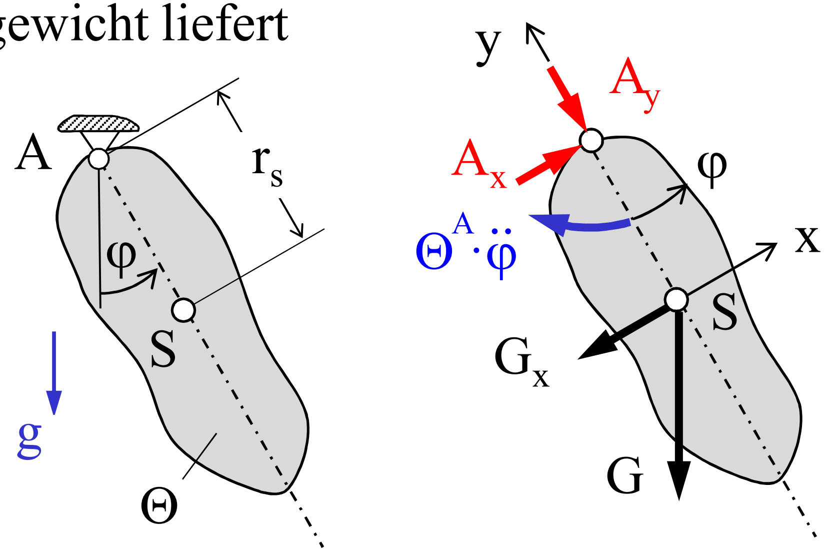
Gegeben: Periodenlänge $T_0 = 2$ s

Gesucht: Pendellänge L

4.1.1.6.2 Physikalisches Pendel

Beim physikalischen Pendel ist die Masse auf den ganzen Pendelkörper verteilt. Das dynamische Momentengleichgewicht liefert

$$\sum M^A = 0 = -G_x \cdot r_s - \Theta_A \cdot \ddot{\varphi}$$



Hierbei ist r_s der Abstand des Schwerpunktes und Θ_A das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Drehpunkt A.

Mit $G_x = m \cdot g \cdot \sin\varphi$ folgt

$$\Theta_A \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin\varphi = 0$$

Für kleine Ausschläge ergibt sich daraus die linearisierte Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot r_s}{\Theta_A} \cdot \varphi = 0$$

mit der Eigenkreisfrequenz

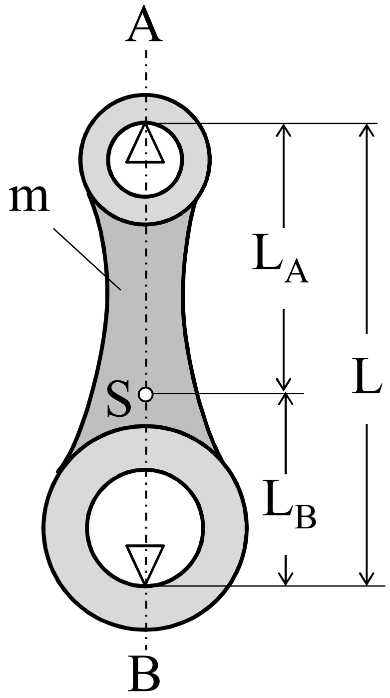
$$\omega_0 = \sqrt{m \cdot g \cdot r_s / \Theta_A}$$

Aus der Schwingungsdauer um zwei verschiedenen Lagerpunkte auf einer Schwerelinie eines Körpers lässt sich dessen Massenträgheitsmoment sowie die Lage des Schwerpunktes experimentell ermitteln.

Beispiel : Schwingungsmessung an einem Pleuel

Gegeben: Länge $L = 0{,}5$ m, $10 \cdot T_A = 13{,}17$ s, $10 \cdot T_B = 11{,}10$ s, Masse $m = 125$ kg

Gesucht: Schwerpunktlage L_A und Massenträgheitsmoment Θ_S



… Fortsetzung

4.1.2 Freie gedämpfte Schwingungen

Freie Schwingungen eines mechanischen Systems klingen mit der Zeit ab, da dem System durch Reibung Energie entzogen wird.

Bei der Festkörperreibung ist die Dämpfung weitgehend unabhängig von der Geschwindigkeit. Bewegt sich ein Körper hingegen durch ein Medium, ist die Dämpfung bei laminarer Strömung linear bzw. bei turbolenter Strömung quadratisch von der Geschwindigkeit abhängig.

Bei Schwingungen im technischen Bereich tritt neben der Festkörperreibung meist eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung auf. Für Beide Fälle sind die Schwingungsgleichungen linear und somit analytisch zu lösen.

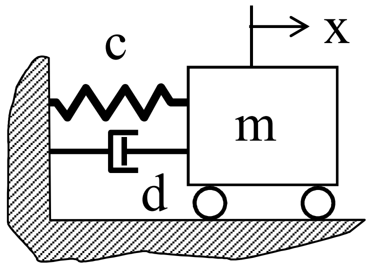
Die Behandlung nichtlinearer Schwingungssysteme ist kompliziert und meist nur numerisch möglich. Diese werden daher oftmals linearisiert, um das Schwingungsverhalten näherungsweise beschreiben zu können.

4.1.2.1 Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

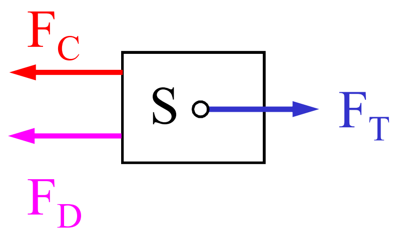
Die Bewegungsgleichung lässt sich am Beispiel eines Feder-Masse-Systems mit zusätzlichem Dämpfungsglied aus der dynamische Grundgleichung in der Form von D‘ Alembert aufstellen :

$$\sum F_x = 0 = F_T - F_C - F_D$$

Systembild



Freikörperbild



Für geschwindigkeitsproportionale Dämpfung erhält man mit $F_C = c \cdot x$, $F_T = -m \cdot \ddot{x}$ und $F_D = d \cdot \dot{x}$

$$\sum F_x = 0 = m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x$$

Die Dämpfungskraft F_D ist der Geschwindigkeit stets entgegengesetzt mit dem Dämpfungskoeffizient d in kg/s. Weitere Umformung liefert die Differentialgleichung des gedämpften Systems

$$\ddot{x} + \frac{d}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$$

Der Lösungsansatz und dessen Ableitungen

$$x(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$\ddot{x}(t) = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

führen durch Einsetzen in die Differenzialgleichung auf

$$C \cdot \left(\lambda^2 + \frac{d}{m} \cdot \lambda + \frac{c}{m} \right) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

Die Gleichung ist nur erfüllt, wenn

$$\lambda^2 + \frac{d}{m} \cdot \lambda + \frac{c}{m} = 0$$

gilt. Die charakteristische Gleichung besitzt die Lösung

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m} \right)^2 - \frac{c}{m}}$$

Mit der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\omega_0 = \sqrt{c/m}$$

und der Abklingkonstante

$$\delta = d/2m$$

folgt für die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Wird die Abklingkonstante mit der Eigenfrequenz ω_0 dimensionslos gemacht, erhält man den Dämpfungsgrad (Lehr'sches Dämpfungsmaß)

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2m \cdot \omega_0} = \frac{d}{2m \cdot \sqrt{c/m}} = \frac{d}{2\sqrt{m \cdot c}}$$

und damit die charakteristischen Gleichung in der Form

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \cdot \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1}\right)$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung ergibt sich dann als Linearkombination der Partikulärlösungen $x_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$ und $x_2 = C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$

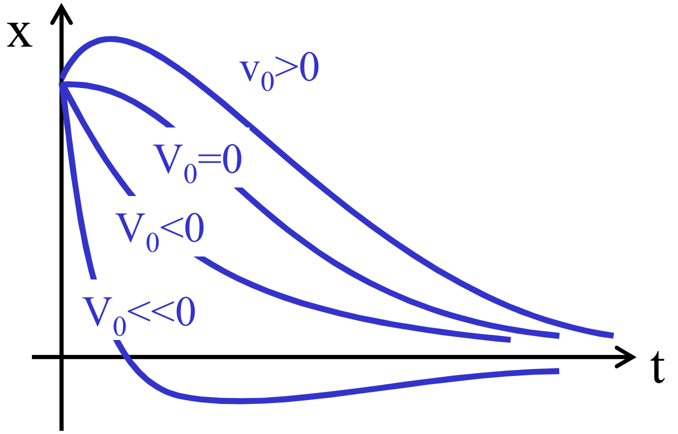
$$x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Je nach dem Wert von D erhält man verschiedene Lösungen, die unterschiedliche Bewegungsformen charakterisieren:

a) Starke Dämpfung (D > 1)

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei reelle Lösungen (Eigenwerte). Eine Schwingung kommt nicht zustande. Die ausgelenkte Masse nähert sich asymptotisch der statischen Ruhelage.

In Abhängigkeit von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ergeben sich unterschiedliche Abklingkurven. Bei starkem Anstoß in Richtung der Ruhelage kann das System auch über die Ruhelage hinausschwingen.



b) Kritische Dämpfung (D = 1)

Die charakteristische Gleichung hat eine doppelte Nullstelle. Der Verlauf entspricht dem starken Dämpfung, führt jedoch zu der schnellst möglichen Annäherung an die Ausgangslage.

Mit $D=1$ ist $\delta_{krit}=\omega_0$ und damit $\lambda_{1,2}=-\delta_{krit}$. Der allg. Lösungsansatz für diesen Fall ist eine Linearkombination zweier Exponentialfunktionen:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\delta_{krit} \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\delta_{krit} \cdot t} = e^{-\delta_{krit} \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t)$$

und damit die Geschwindigkeit als Ableitung des Weges

$$\dot{x}(t) = -\delta_{krit} \cdot e^{-\delta_{krit} \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\delta_{krit} \cdot t}$$

Wird das System zum Zeitpunkt $t = 0$ um x_0 ausgelenkt und dann ohne Anfangsgeschwindigkeit $v(t=0)=0$ losgelassen, ergeben sich die Randbedingungen aus

$$x(t=0) = x_0 = C_1$$

und

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -\delta_{krit} \cdot C_1 + C_2 \quad \Rightarrow C_2 = \delta_{krit} \cdot x_0$$

Einsetzen der Randbedingungen liefert die spezielle Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta_{krit} \cdot t} \cdot (1 + \delta_{krit} \cdot t)$$

Der aperiodischen Grenzfall findet in der Technik Anwendung, wenn ein System möglichst effektiv gedämpft werden soll, z. B bei Stoßdämpfern oder Zeigerinstrumenten. Hierbei ist die kritische Abklingkontante δ_{krit} so zu wählen, dass sie mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems übereinstimmt.

Beispiel : Kritische Dämpfung eines Drehtisches

Gegeben: Massenträgheitsmoment $\Theta = 1$ kgm^2, Drehsteifigkeit $c_t = 40$ Nm

Gesucht: Kritische Abklingkonstante δ_{krit}, Eigenfrequenz f_0 und Verhältnis φ/φ_0 nach $t = 1$ s

c) Schwache Dämpfung (D < 1)

Für den fall der schwachen Dämpfung erhält man mit $\delta < \omega_0$ als Lösung der charakteristischen Gleichung zwei konjugiert komplexe Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad = -\delta \pm i \cdot \omega$$

mit der imaginären Zahl $i = \sqrt{-1}$ und der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-\delta + i\cdot\omega)t} + C_2 \cdot e^{(-\delta - i\cdot\omega)t} = e^{-\delta\cdot t}\left(C_1 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} + C_2 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\right)$$

Die Lösung entspricht einer harmonischen Schwingung mit der Eigenfrequenz ω, deren Amplitude mit der Zeit abnimmt. Mit der Eulerschen Relation

$$e^{i\cdot z} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$$

erhält man die Schwingungsgleichung in der trigonometrischen Form

$$x(t) = e^{-\delta\cdot t}\left[C_1 \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) + C_2 \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) - i \cdot \sin(\omega \cdot t)\right)\right]$$

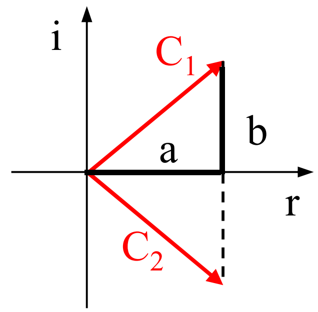
Nach Zusammenfassen der Terme erhält man

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t}\left[(C_1 + C_2) \cdot \cos(\omega \cdot t) + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$

Mit den konjugiert komplexen Konstanten $C_1 = a + i \cdot b$ und $C_2 = a - i \cdot b$ ergeben sich die reellen Faktoren

$$C_1 + C_2 = a + i \cdot b + a - i \cdot b = 2a = A$$

$$i \cdot (C_1 - C_2) = i \cdot (a + i \cdot b - a + i \cdot b) = 2i^2 \cdot b = -2b = B$$



und damit die reelle Form der Schwingungsgleichung

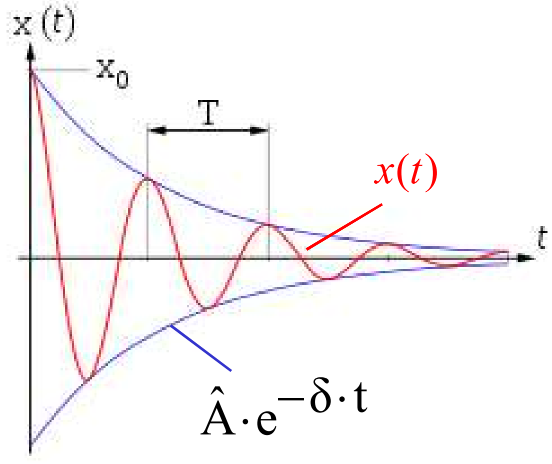
$$x(t) = e^{-\delta \cdot t}\left[A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$

bzw.

$$x(t) = \hat{A} \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \alpha_0)$$

mit $\hat{A} = \sqrt{A^2 + B^2}$ und $\tan \alpha_0 = A/B$

Es ergibt sich eine amplitudenveränderliche Schwingung mit der Hüllkurve $\hat{A} \cdot e^{-\delta t}$.



Die Ableitung der Schwingungsgleichung liefert die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -e^{-\delta \cdot t}\left[(A \cdot \delta - B \cdot \omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) + (B \cdot \delta + A \cdot \omega) \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$

Die Integrationskonstanten werden wieder aus den Anfangsbedingungen gewonnen. Mit

$$x(t=0) = x_0 = A \quad \text{und} \quad \dot{x}(t=0) = 0 = x_0 \cdot \delta - B \cdot \omega \quad \Rightarrow B = x_0 \cdot \frac{\delta}{\omega}$$

ergibt sich

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}\left[\cos(\omega \cdot t) + \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$

bzw. mit

$$\hat{A} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + x_0^2 \cdot \frac{\delta^2}{\omega^2}} = x_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} = x_0 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega^2}} = x_0 \cdot \frac{\omega_0}{\omega}$$

und

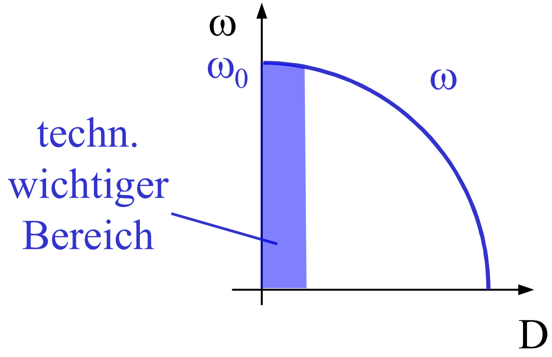
$$\tan \alpha_0 = \frac{A}{B} = x_0 \cdot \frac{\delta}{x_0 \cdot \omega} = \frac{\delta}{\omega}$$

folgt

$$x(t) = x_0 \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \alpha_0)$$

Während die Amplitude mit der Zeit abnimmt, bleibt die Eigenkreisfrequenz konstant. Zwischen der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 und der des gedämpften Systems ω gilt die Beziehung

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}$$



Trägt man die Eigenkreisfrequenz über dem Dämpfungsgrad auf, entspricht die Beziehung der eines Kreises mit dem Radius ω_0.

Für den technisch wichtigen Fall sehr schwacher Dämpfung ($D < 0{,}1$) stimmt ω und ω_0 praktisch überein. Die Periodendauer des gedämpften Systems ergibt sich aus

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{1 - D^2}}$$

und die Eigenfrequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega \cdot \sqrt{1 - D^2}}{2\pi}$$

4.1.2.2 Logarithmisches Dekrement

Die bei Auslegung dynamisch belasteten Bauteilen und Maschinen an zu setzende Dämpfung beruht auf Erfahrungswerten, die experimentell aus dem Abfall der Schwingungsausschläge gewonnen werden können. Der Ausschlag x zum Zeitpunkt t ergibt sich aus

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t}\left[A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$

Mit $\omega \cdot T = 2\pi$ ergibt sich der Ausschlag zum Zeitpunkt $t + T$

$$x(t+T) = e^{-\delta(t+T)}\left[A \cdot \cos(\omega \cdot t + 2\pi) + B \cdot \sin(\omega \cdot t + 2\pi)\right]$$

$$= e^{-\delta(t+T)}\left[A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$

Damit ergibt sich für das Amplitudenverhältnis

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{e^{-\delta \cdot t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{-\delta \cdot t + \delta \cdot t + \delta \cdot T} = e^{\delta \cdot T} = \text{const.}$$

Das Verhältnis zweier auf einander folgender Ausschläge ist konstant.

Die Dämpfung lässt sich somit über das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \delta \cdot T$$

bestimmen. Für die Abklingkonstante gilt

$$\delta = \frac{\Lambda}{T} = \frac{1}{T} \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\Lambda = \delta \cdot T = \delta \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \delta \cdot \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-D^2}} = \frac{2\pi \cdot D}{\sqrt{1-D^2}}$$

erhält man für den Dämpfungsgrad

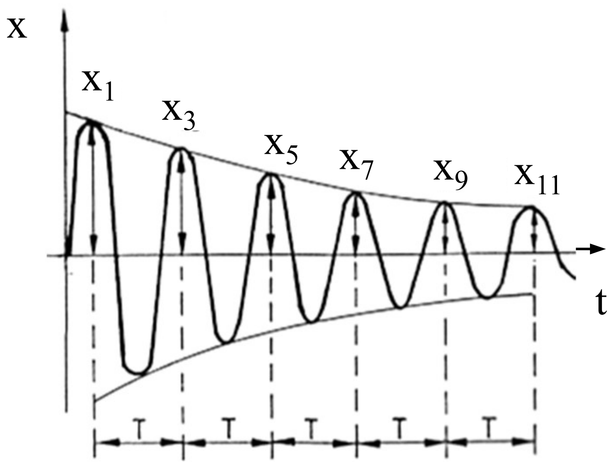
$$D = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2}}$$

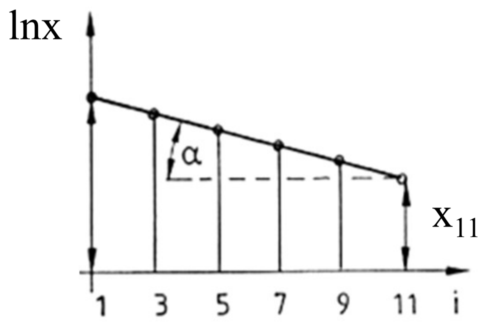
Für $\Lambda \rightarrow \infty$ strebt der Dämpfungsgrad gegen 1 (krit. Dämpfung)

Die Genauigkeit der experimentellen Ergebnisse wird verbessert, wenn der Schwingungsabfall für ein Vielfaches n der Schwingungsdauer T gemessen wird. Es gilt dann

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t + n \cdot T)}$$

Trägt man die Schwingungsausschläge im logarithmischen Maßstab auf, ergibt sich für einen geschwindigkeitsproportionalen Schwinger eine Gerade mit dem Steigungswinkel α.





aus J. Berger: Techn. Mechanik für Ingenieure

Beispiel : Freie, gedämpfte Schwingung

Gegeben: $T = 2{,}2$ s, $x_0 = 50$ mm, $x(t = 5 \cdot T) = 10$ mm, $v(t = 0) = 0$

Gesucht: Λ, δ, f, ω, D, ω_0 und t für $x/x_0 = 0{,}1$

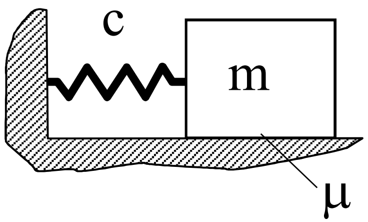
4.1.2.3 Reibungsdämpfung

Bei Coulomb'scher Festkörperreibung tritt zusätzlich zur Feder- und Trägheitskraft eine konstante Reibungskraft F_R auf, die nur vom Reibwert μ und der Normalkraft N abhängt, deren Orientierung jedoch immer entgegengerichtet zur Geschwindigkeit ist. Es gilt

$$F_R = -\mu \cdot N \cdot \mathrm{sign}(\dot{x})$$

mit

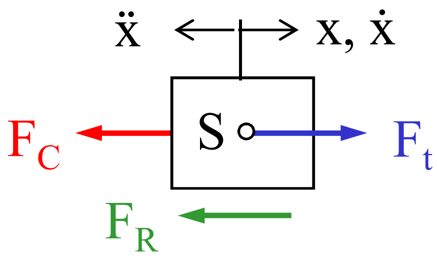
$$\mathrm{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 \text{ für } \dot{x} > 0 \\ -1 \text{ für } \dot{x} < 0 \end{cases}$$



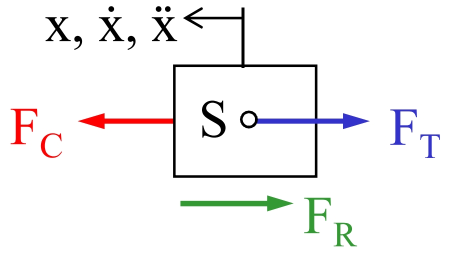
Wird das Feder-Masse-System ausgelenkt und losgelassen, verhält sich die Reibkraft bereichsweise linear, je nach Bewegungsrichtung ergeben sich jedoch unterschiedliche Schwingungsgleichungen. Für die Hinbewegung $(\dot{x} > 0)$ folgt

$$\sum F_x = 0 = F_T - F_C - F_R$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} + c \cdot x + F_r = 0$$



Für die Rückbewegung ($\dot{x} < 0$) ergibt sich



$$\sum F_x = 0 = F_T - F_C + F_R$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} + c \cdot x - F_R = 0$$

Es handelt sich um inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich nur durch das Vorzeichen des Störgliedes unterscheiden. Mit $\omega_0^2 = c/m$ folgt

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \pm \frac{F_R}{m}$$

Die all. Lösung der Gleichung $x = x_h + x_p$ setzt sich aus dem homogenen Anteil $x_h = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ und dem partikulären Anteil

$$x_p = k = \text{const.} \qquad \Rightarrow \dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert mit $c = m \cdot \omega_0^2$

$$k = \pm \frac{F_R}{m \cdot \omega_0^2} = \pm \frac{F_R}{c} = \pm x_R$$

Hierbei ist x_R die Auslenkung der Feder, die zur Überwindung der Reibkraft F_R erforderlich ist.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \pm x_R$$

Mit der Geschwindigkeit als Ableitung des Weges

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

ergeben sich die Konstanten für die 1. Halbschwingung aus den Anfangsbedingungen

$$x(t_1 = 0) = x_0 = A + x_R \qquad \Rightarrow A = x_0 - x_R$$

und

$$\dot{x}(t_1 = 0) = 0 = B$$

und damit der Schwingungsausschlag

$$x(t_1) = (x_0 - x_R) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t_1) + x_R$$

Wird der der Reibungsschwinger aus der Ruhelage um x_0 ausgelenkt und sich selbst überlassen, führt er eine harmonische Rückwärtsbewegung um die Mittellage x_R mit der Amplitude $x_0 - x_R$ aus. Die Eigenkreisfrequenz ist die des ungedämpften Systems, die Schwingungsdauer ist $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Für die 2. Halbschwingung erhält man mit $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) - x_R$ und $\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ aus den Anfangsbedingungen

$$x(t_2 = 0) = -x_0 + 2x_R = A - x_R$$

$$\Rightarrow A = 3x_R - x_0$$

und

$$\dot{x}(t_2 = 0) = 0 = B$$

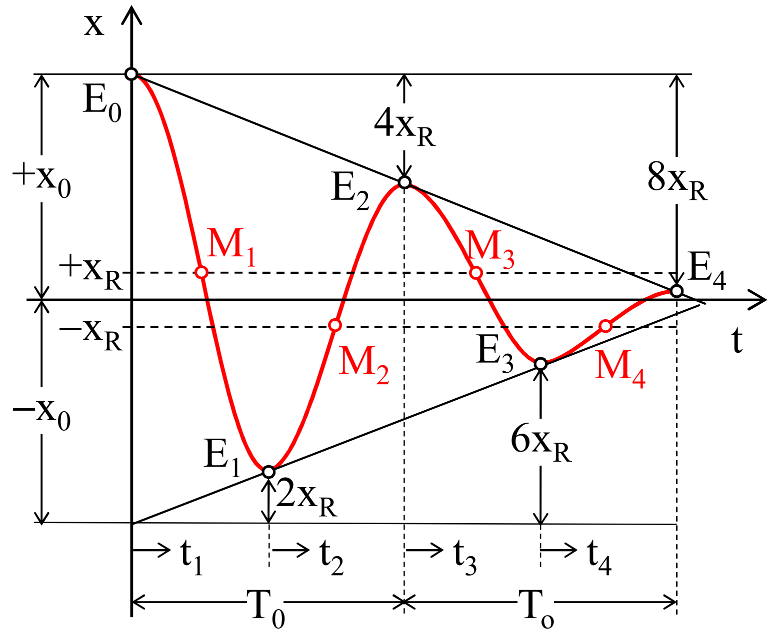
und damit den Schwingungsausschlag

$$x(t_2) = -(x_0 - 3x_R) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t_2) - x_R$$

Für die n-te Halbschwingung gilt

$$x(t_n) = \pm\left[(x_0 - (2n-1) \cdot x_R) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t_n) + x_R\right]$$

wobei + für ungerade n und – für gerade n gilt.



Die Schwingungsausschläge nehmen bei jeder Halbschwingung um $2x_R$ ab mit den jeweiligen Mittelpunkten auf Parallelen zur Zeitachse im Abstand $\pm x_R$. Nach n Halbschwingungen ist die Amplitude auf $x_0 - 2n \cdot x_R$ abgesunken.

Bei jeder Bewegungsumkehr kommt der Schwinger kurzzeitig zur Ruhe. Für die weitere Bewegung muss die Restfederkraft

$$F_C = c \cdot (x_0 - 2n \cdot x_R)$$

die Haftkraft

$$F_H = \mu_H \cdot N = c \cdot x_H$$

überwinden. Die Schwingung ist beendet, wenn die Restamplitude kleiner als der Haftungsbereich x_H ist.

$$x_0 - 2m \cdot x_R < x_H$$

Daraus folgt die maximale Anzahl der Schwingungen

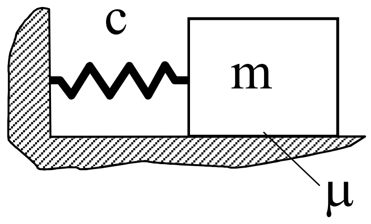
$$m > \frac{x_0 - x_H}{2x_R}$$

wobei m die kleinste ganze Zahl ist, die die Ungleichung erfüllt. Im allg. wird die Endlage des Reibungsschwingers nicht mit seiner Ruhelage überein-stimmen, d. h. die Geraden, auf denen die Umkehrpunkte liegen, schneiden sich i. d. R. nicht auf der Zeitachse.

Beispiel : Reibungsschwinger

Gegeben: $m = 10$ kg, $c = 4$ N/mm, $x_0 = 20$ mm, $\mu = 0{,}05$, $\mu_H = 0{,}1$

Gesucht: ω_0, f_0, x_R, $x(t{=}2T_0)$, x_H, n, $x(t_n)$



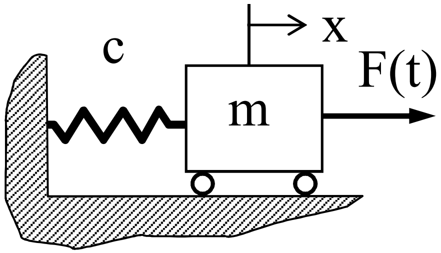
4.2 Erzwungene Schwingung

Wird ein schwingfähiges System durch eine Lastfunktion F(t) angeregt, so bleibt die Schwingung so lange erhalten, wie die Erregerkraft wirkt.

4.2.1 Harmonische Anregung des ungedämpften Systems

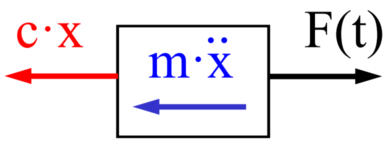
Das dynamische Gleichgewicht am frei geschnittenen, ungedämpften System liefert eine inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung

$$\sum F_x = 0 = F(t) - m \cdot \ddot{x} - c \cdot x$$



Für den Falle einer harmonischen Anregung erhält man

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$



mit der Kraftamplitude F_0 und der Erreger-kreisfrequenz Ω

Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich aus der homogenen Lösung $x_p(t)$ und einer partikulären Lösung $x_p(t)$ zusammen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Der homogene Anteil stellt die Lösung der freien, ungedämpften Schwingung dar

$$x_h(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Den Partikuläranteil erhält man mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$x_p(t) = x_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Setzt man den Ansatz und dessen 2. Ableitung

$$\ddot{x}_p(t) = - x_0 \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

in die Differentialgleichung ein und dividiert durch m, erhält man

$$- x_0 \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \frac{c}{m} \cdot x_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) = \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Division durch $\sin(\Omega \cdot t)$ führt mit $\omega_0^2 = c/m$ auf

$$x_0 = \frac{F_0 / m}{c/m - \Omega^2} = \frac{F_0 \cdot \omega_0^2 / c}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{F_0 / c}{1 - (\Omega / \omega_0)^2}$$

und damit zur partikulären Lösung

$$x_p(t) = \frac{F_0 / c}{1 - (\Omega / \omega_0)^2} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich mit

$$x_h(t) = \left[A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)\right] + \frac{F_0 / c}{1 - (\Omega / \omega_0)^2} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

als Überlagerung der homogenen und der partikulären Lösung. Der erste Term stellt die freie (instationäre) Schwingung dar, in der das System mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 schwingt und die bei vorhandener Dämpfung mit der Zeit abklingt. Der zweite Term ist die stationäre Schwingungsantwort auf die harmonischen Anregung, in der das System mit der Erregerfrequenz Ω schwingt.

Führt man das Abstimmverhältnis

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

als Quotient aus Erreger- und Eigenkreisfrequenz ein, erhält man

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{1-\eta^2} \cdot \frac{F_0}{c} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Der Faktor

$$V = \frac{1}{1-\eta^2} = \frac{x_0}{u_0}$$

wird als Vergrößerungsfunktion bezeichnet und gibt an, wie stark sich die Schwingungsamplitude x_0 gegenüber der Erregeramplitude $u_0 = F_0/c$ in Abhängigkeit vom Abstimmverhältnis verändert.

Für den Fall eines ideal ungedämpften Systems bleibt die Eigenschwingung erhalten, die Konstanten A und B müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Für $x(t{=}0) = 0$ und $\dot{x}(t{=}0) = 0$ ergibt sich mit der Geschwindigkeit als Ableitung des Weges

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{\Omega}{1-\eta^2} \cdot \frac{F_0}{c} \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

die Konstanten

$$A = 0$$

und

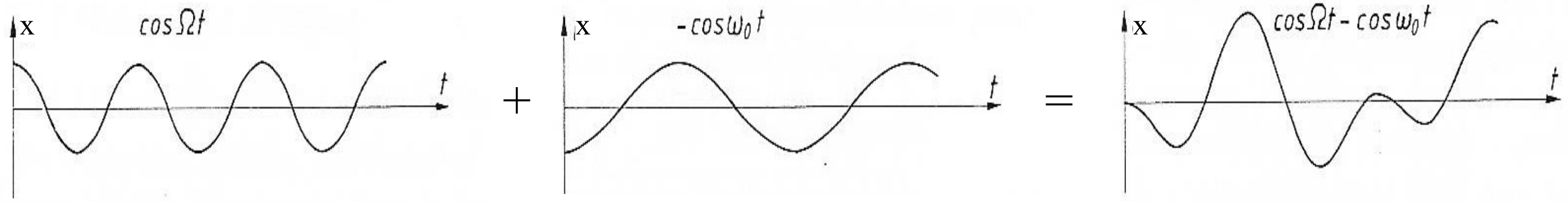
$$B = -\frac{\Omega}{\omega_0 (1-\eta^2)} \cdot \frac{F_0}{c} \quad = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{F_0}{c}$$

und damit

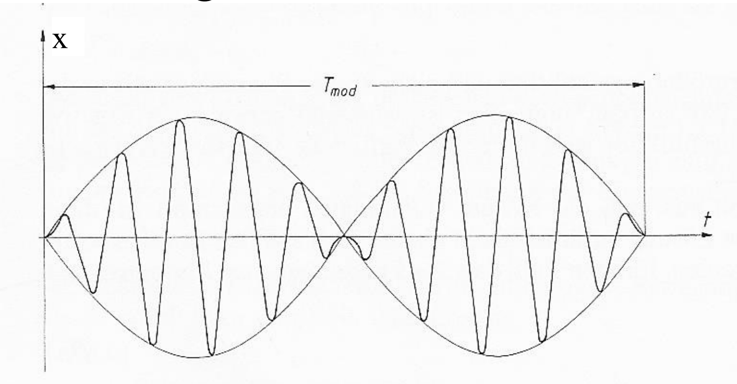
$$x(t) = \frac{1}{1-\eta^2} \cdot \frac{F_0}{c} \cdot \left[\sin(\Omega \cdot t) - \eta \sin(\omega_0 \cdot t)\right]$$

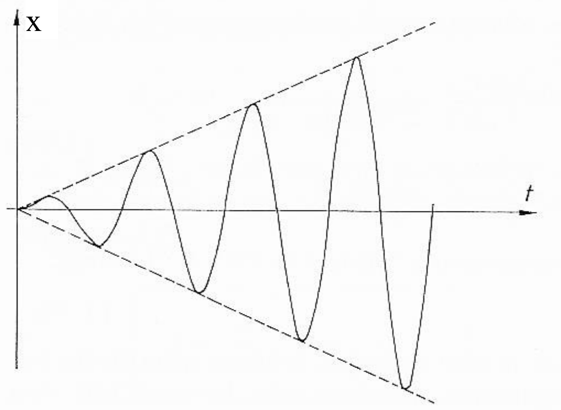
Der freie und der stationäre Anteil besitzen unterschiedliche Amplituden und Frequenzen.

Im allgemeinen erhält man aus der Überlagerung der beiden Anteile eine nicht-harmonische, aber periodische Schwingung, die den Eischwingvorgang eines Systems beschreibt



Liegt die Erregerfrequenz Ω nahe der Eigenfrequenz ω_0, kommt es zur sog. Schwebung.



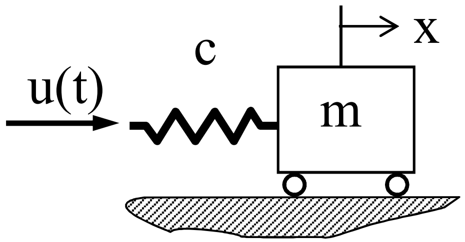


Im Resonanzfall $\Omega = \omega_0$ strebt der Vergrößerungsfaktor η gegen unendlich, die Schwingungsamplituden steigen linear mit der Zeit an.

4.2.1.1 Fußpunktanregung

Der in der stationären Lösung auftretende Quotient

$$u_0 = F_0/c$$

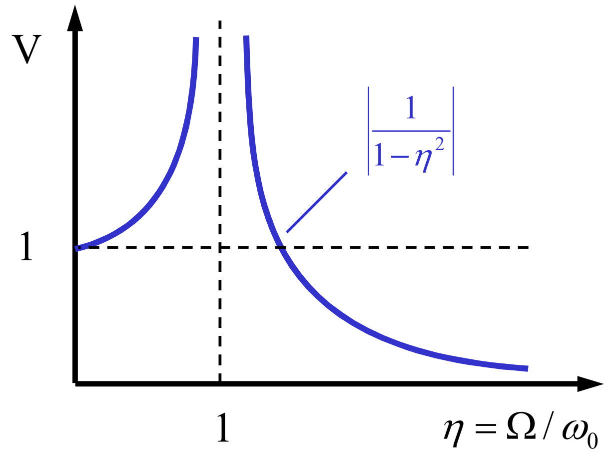


entspricht der Amplitude einer im Auflager der Feder (Fußpunkt) vorgegebenen harmonischen Verschiebung

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Damit wird die stationäre Schwingung

$$x_p(t) = \frac{1}{1-\eta^2} \cdot u_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

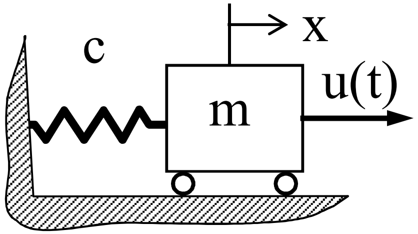


mit der Vergrößerungsfunktion

$$V = \frac{1}{1-\eta^2} = \frac{x_0}{u_0}$$

Für $\eta < 1$ folgt das System gleichphasig der Bewegung des Fußpunktes. Bei $\eta = 1$ werden die Ausschläge unendlich, es liegt Resonanz vor. Für $\eta > 1$ schwingt das System gegenphasig. Für große Werte von η ist das System zu träge, um der Fußpunkterregung zu folgen.

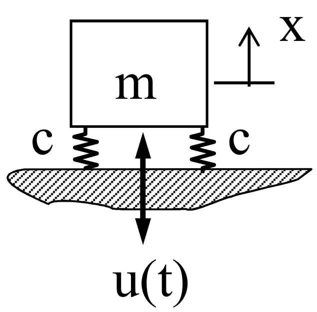
Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn die harmonische Verschiebungsfunktion u(t) an der Masse direkt angreift.



Beispiel : Fußpunktanregung

Gegeben: $m = 20$ kg, $c = 1{,}5$ N/mm, $u_0 = 10$ mm, $\Omega = 8\ s^{-1}$

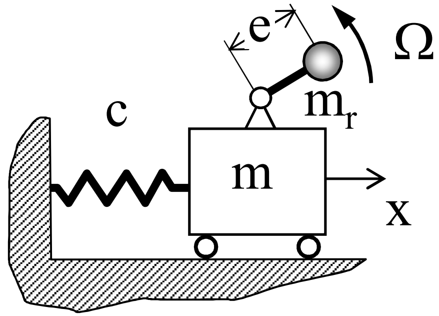
Gesucht: ω_0, η, V, x



4.2.1.2 Massenkraftanregung

Bei der Massenkraftanregung wird die periodische Erregung durch die Fliehkraft F_0 einer umlaufenden Masse m_r hervorgerufen. Mit der Unwucht $U = m_r \cdot e$ erhält man

$$F_r = m_r \cdot e \cdot \Omega^2$$



Mit $u_r = F_r / c$ ist die stationäre Schwingung

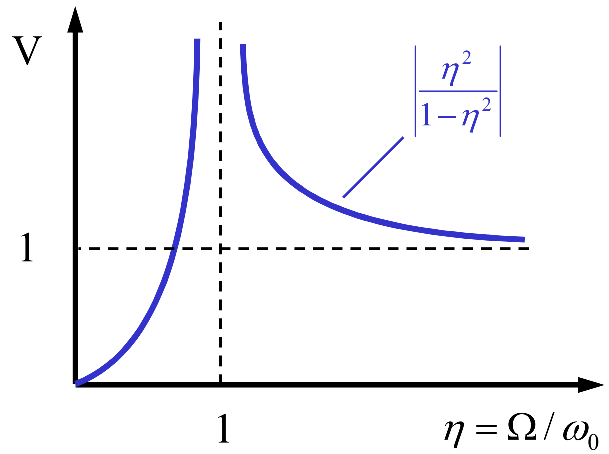
$$x_p(t) = \frac{1}{1-\eta^2} \cdot \frac{m_r \cdot e}{c} \cdot \Omega^2 \sin(\Omega \cdot t)$$

und mit $\Omega = \eta \cdot \omega_0$ sowie $\omega_0^2 = c/m$ folgt

$$x_p(t) = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{m_r \cdot e}{m} \sin(\Omega \cdot t)$$

mit der Vergrößerungsfunktion

$$V = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} = \frac{m}{m_r \cdot e} \cdot x_0$$

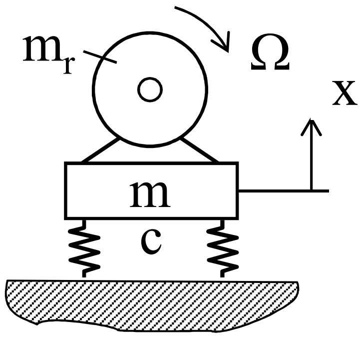


Für $\eta < 1$ ist die Auslenkung infolge der geringen Winkelgeschwindigkeit klein. Bei $\eta = 1$ liegt Resonanz vor. Für $\eta > 1$ folgt die Auslenkung der Masse gegenphasig zur Auslenkung der Unwucht.

Beispiel : Massenkraftanregung

Gegeben: $m = 8000$ kg, $m_r = 3000$ kg, $c = 2 \cdot 10^4$ N/mm, $e = 1{,}5$ mm, $n = 500$ min^{-1}

Gesucht: Ω, ω_0, η, V, x_0

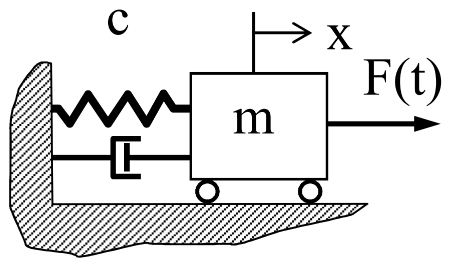


Übung : wie oben, jedoch mit $n = 400$ min^{-1}

4.2.2 Harmonische Anregung des gedämpften Systems

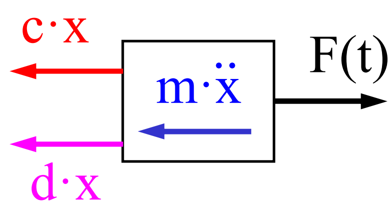
Für die harmonische Anregung eines geschwindigkeitsproportional gedämpften Schwingers liefert das dynamische Gleichgewicht am frei geschnittenen System die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$



Die homogenen Lösung der Differentialgleichung ist identisch mit der Lösung für die freie gedämpfte Schwingung

$$x_h(t) = e^{-\delta \cdot t}\left[A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)\right]$$



Die homogene Lösung klingt bei vorhandener Dämpfung mit der Zeit ab, sie wird deshalb auch als transiente Schwingung bezeichnet. In der Praxis ist dieser beim Einschwingen eines Systems auftretende Anteil meistens uninteressant.

Hingegen bleibt der partikuläre Anteil als stationäre Schwingung erhalten. Da es infolge der Dämpfung zu einer Phasenverschiebung zwischen Erregung und erzwungener Schwingung kommt, muss dies in der Lösung des partikulären Anteils durch den Ansatz der rechten Seite berücksichtigt werden.

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \alpha_0)$$

$$\dot{x}(t) = \Omega \cdot x_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t - \alpha_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 \cdot x_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \alpha_0)$$

Setzt man den Ansatz und seine Ableitungen in die mit $u_0 = F_0/c$, $\delta = d/(2m)$ und $\omega_0^2 = c/m$ umgeformte Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = u_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

ein, erhält man

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot x_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \alpha_0) + 2\delta \cdot \Omega \cdot x_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t - \alpha_0) = u_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Diese Gleichung muss für beliebige Zeiten t erfüllt sein.

Setzt man $\Omega \cdot t - \alpha_0 = 0$ und damit $t = \alpha_0 / \Omega$ in die umgeformte Schwingungs-differentialgleichung ein, erhält man unter Berücksichtigung von $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$

$$2\delta \cdot \Omega \cdot x_0 = u_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\alpha_0)$$

Division durch ω_0^2 liefert mit $D = \delta / \omega_0$ und $\eta = \Omega / \omega_0$

$$2D \cdot \eta \cdot x_0 = u_0 \cdot \sin(\alpha_0)$$

Setzt man $\Omega \cdot t - \alpha_0 = \pi / 2$ und damit $t = (\alpha_0 + \pi/2)/\Omega$ ein, erhält man unter Berücksichtigung von $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\alpha_0 + \pi/2) = \cos(\alpha_0)$

$$(1 - \eta^2) \cdot x_0 = u_0 \cdot \cos(\alpha_0)$$

Werden beide Gleichungen quadriert und anschließend addiert, erhält man

$$\left[(2D \cdot \eta)^2 + (1 - \eta^2)^2\right] \cdot x_0^2 = u_0^2 \cdot \underbrace{\left[\sin^2(\alpha_0) + \cos^2(\alpha_0)\right]}_{= 1}$$

4.2.2.1 Fußpunktanregung

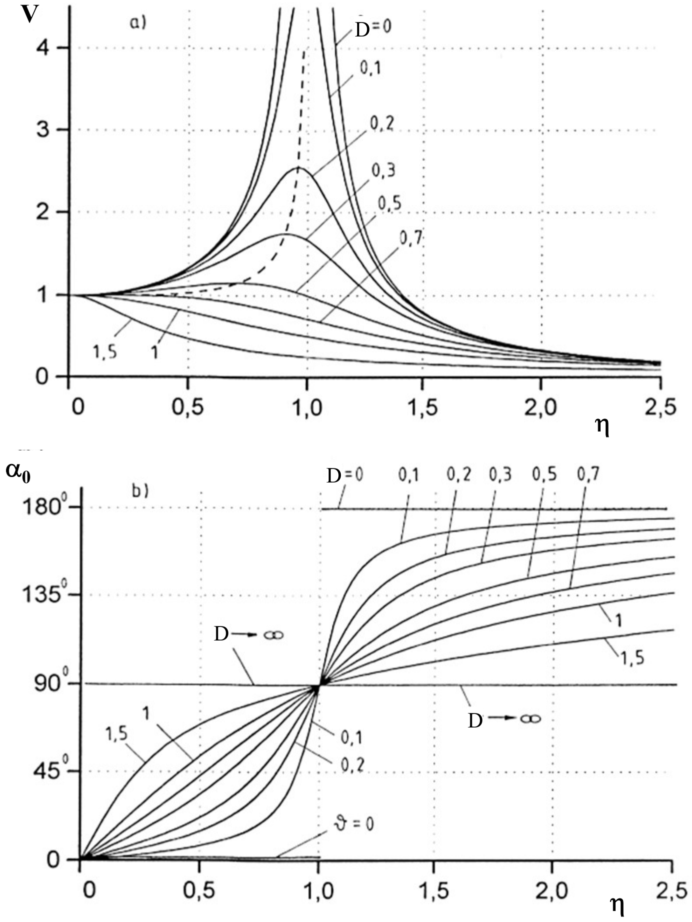
Der Verstärkungsfaktor ergibt sich als Quotient aus der Schwingungsamplitude x_0 und der Erregeramplitude u_0

$$V = \frac{x_0}{u_0} = \frac{1}{\sqrt{(2D \cdot \eta)^2 + (1-\eta^2)^2}}$$

Die Phasenverschiebung erhält man aus der Bedingung

$$\tan\alpha_0 = \frac{2D \cdot \eta}{1-\eta^2}$$

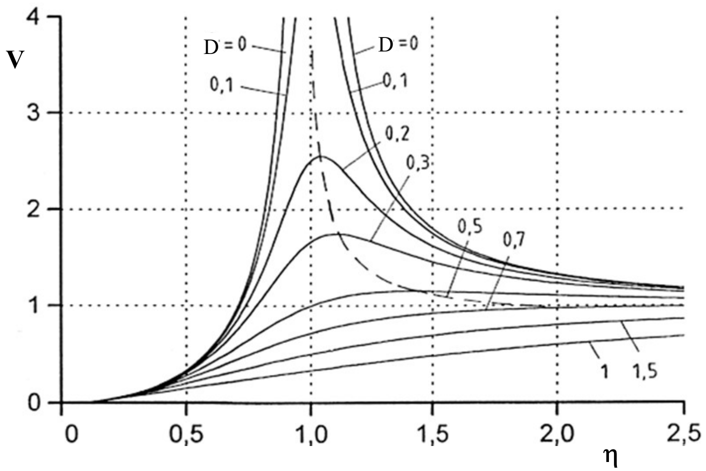
Verstärkungsfaktor und Phasenwinkel hängen vom Abstimmverhältnis η und vom Dämpfungsgrad D ab. Für D > 0 tritt der größte Schwingungsausschlag bei η < 1 auf, für D > 0,5 kommt es zu keiner wesentlichen Verstärkung mehr.



4.2.2.2 Massenkraftanregung

Der Verstärkungsfaktor für die Massenkraftanregung lässt sich analog zur Fußpunktanregung herleiten. Es gilt

$$V = \frac{m}{m_r \cdot e} \cdot x_0 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(2D \cdot \eta)^2 + (1-\eta^2)^2}}$$



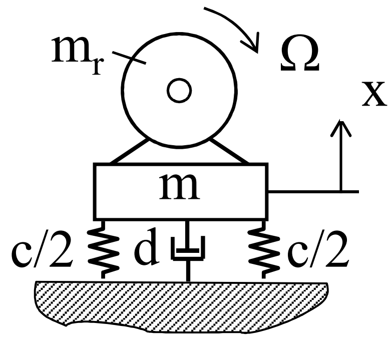
Für D > 0 tritt der größte Schwingungsausschlag bei η > 1 auf. Für D > 0,5 kommt es zu keiner wesentlichen Verstärkung mehr.

Der Phasenwinkel der Massenkraftanregung entspricht dem der Fußpunktanregung. Für η < 1 schwingt das System gleichphasig mit der Anregung, für η > 1 gegenphasig.

Beispiel : Massenkraftanregung

Gegeben: $m = 8000$ kg, $m_r = 3000$ kg, $c = 2 \cdot 10^4$ N/mm, $e = 1{,}5$ mm, $n = 400$ min^{-1}, $D = 0{,}05$

Gesucht: Ω, F_r, ω_0, ω, η, V, x_0, F_C



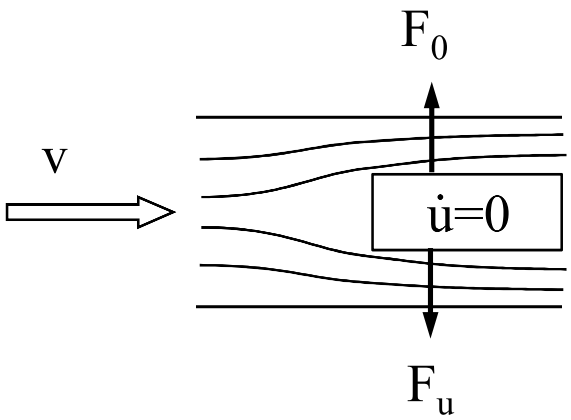
4.2.3 Selbsterregte Schwingungen

Bei selbsterregten Schwingungen wird durch das System selbst die Energiezufuhr so beeinflusst, dass es zu einer periodischen Anregung kommt.

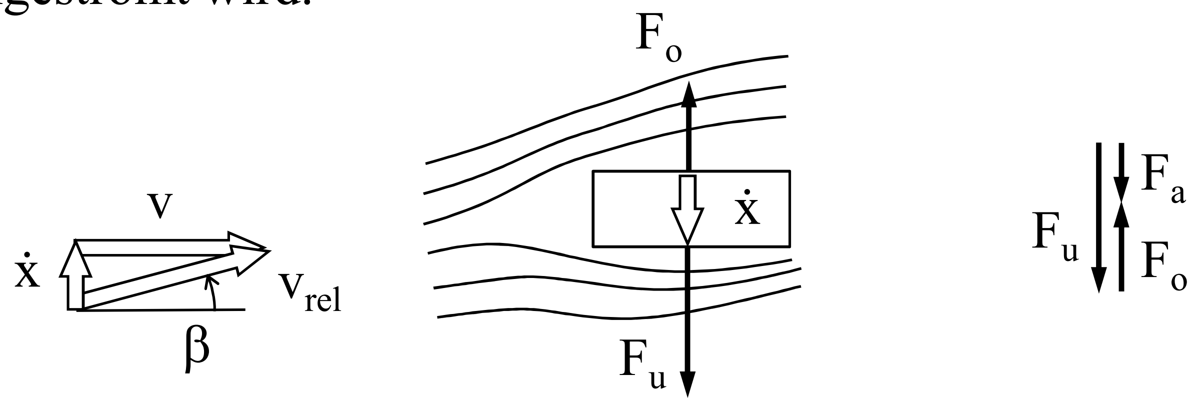
4.2.3.1 Galoppingschwingung

Die Galoppingschwingung, auch Formanregung genannt, tritt vorwiegend bei schlanken Trägern mit rechteckiger oder quadratischer Querschnittsform auf, wenn diese durch ein Medium angeströmt werden..

Wird ein Rechteckprofil symmetrisch mit der Geschwindigkeit v angeströmt, treten auf der Ober- und Unterseite gleichgroße Unterdrücke auf, deren resultierende Querkräfte F_o und F_u sich gegenseitig aufheben.



Wird das Rechteckprofil durch eine Störung senkrecht zur Anströmrichtung bewegt, addieren sich die Geschwindigkeitskomponenten v und $\dot{x}$ vektoriell zur relativen Geschwindigkeit v_{rel}, mit der das Profil unter dem Anstellwinkel β schräg angeströmt wird.

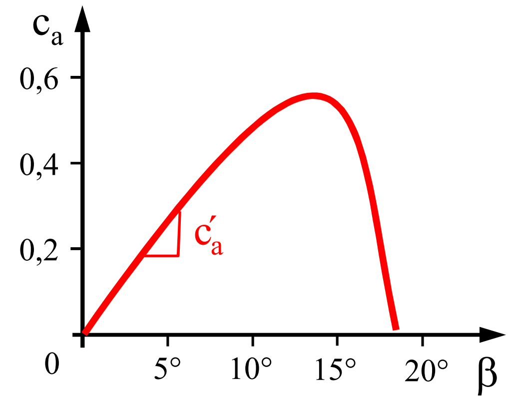


Durch die schräge Anströmung entstehen unterschiedliche Druckverteilungen auf der Ober- und Unterseite, was beim Rechteck zu einer resultierenden Anfachkraft F_a führt, die in Richtung der Querbewegung zeigt, d.h. die Bewegung wird in der Störungsrichtung verstärkt. Bei der Rückwärtsbewegung ergeben sich analoge Verhältnisse, es entsteht eine angefachte Schwingung mit niedriger Frequenz und großer Amplitude.

Die Anfachkraft ergibt sich aus

$$F_a = \frac{\rho}{2} \cdot (v^2 + \dot{x}^2) \cdot A \cdot c_a$$

mit der Dichte ρ des anströmenden Mediums, der Stirnfläche A des Profils und dem Abtriebs-beiwert c_a, der im Windkanal gemessen wird.



Für kleine Anstellwinkel kann der Abtriebsbeiwert näherungsweise durch eine Gerade beschrieben werden. Mit der Steigung c_a' und $\tan\beta \approx \beta = \dot{x}/v$ folgt

$$c_a = c_a' \cdot \frac{\dot{x}}{v}$$

Für kleine Winkel β gilt außerdem $\dot{x} \ll v$ und somit $v^2 + \dot{x}^2 \approx v^2$. Daraus folgt

$$F_a = \frac{\rho}{2} \cdot v \cdot \dot{x} \cdot A \cdot c_a'$$

Wird die die linearisierte Anfachkraft F_a als Störglied in die Differential-gleichung der gedämpften Schwingung eingesetzt, ergibt sich

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x = \frac{\rho}{2} \cdot v \cdot \dot{x} \cdot A \cdot c_a'$$

Mit dem von der Strömungsgeschwindigkeit abhängigen Anfachungskoeffizient

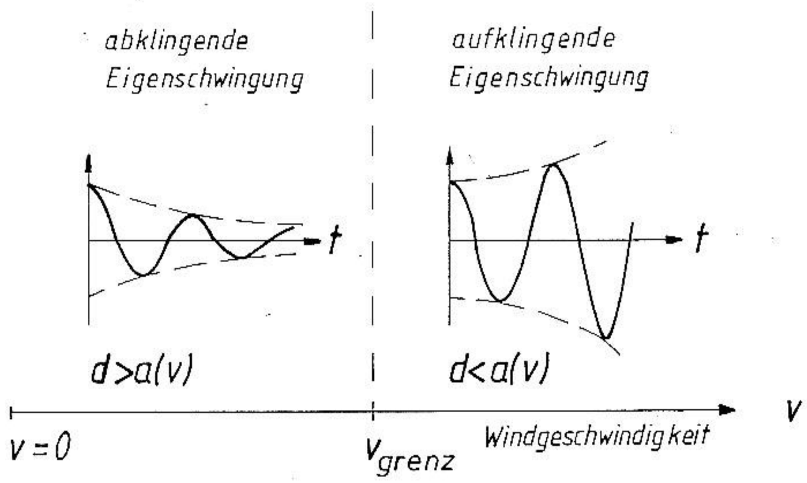
$$a(v) = \frac{\rho}{2} \cdot v \cdot A \cdot c'_a$$

erhält man die homogene Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} + [d - a(v)] \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0$$

deren Lösung den zeitlichen Verlauf der Aufschwingung wiedergibt

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\frac{a-d}{2m} \cdot t}\left[\cos(\omega \cdot t) + \frac{d \cdot \sin(\omega \cdot t)}{2m \cdot \omega}\right]$$



aus R. Gasch, K. Knothe: Strukturdynamik

Bei niedrigen Geschwindigkeiten ist der Dämpfungskoeffizient d größer als der Anfachkoeffizient a, die Eigenschwingungen klingen ab. Ab einer Grenzgeschwindigkeit v_{grenz} ist $a > d$, das System wird entdämpft, die Schwingungen werden bei einer beliebig kleinen Störung x_0 exponentiell verstärkt.

Eine Begrenzung der Schwingungsausschläge erfolgt erst bei großem Anstellwinkel β, wenn der Abtriebsbeiwert einen negativen Gradienten aufweist oder wenn das System infolge der großen Verformung anschlägt oder versagt.

Beispiel : Galoppingschwinger

Gegeben: $m = 2$ kg, $c = 50$ N/m, $\rho = 1{,}2$ kg/m^3, $A = 0{,}1$ m^2, $D = 0{,}1$, $c_a' = 2{,}9$ rad^{-1}

Gesucht: ω_0, ω, T_0, d, v_{grenz}

Übung : wie oben

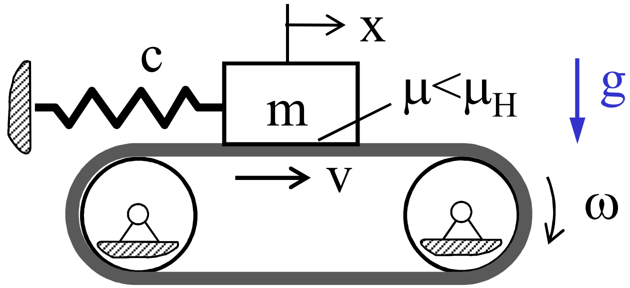
Gegeben: $v = 20$ m/s

Gesucht: a und x/x_0 nach $t = 5T$

4.2.3.2 Haftgleitung

Der Haftgleitffekt (Stick-Slip-Effekt) bezeichnet das ruckweise Gleiten von gegeneinander bewegten Festkörpern. Der Effekt tritt auf, wenn die Haftreibung μ_H merklich größer ist als die Gleitreibung μ.

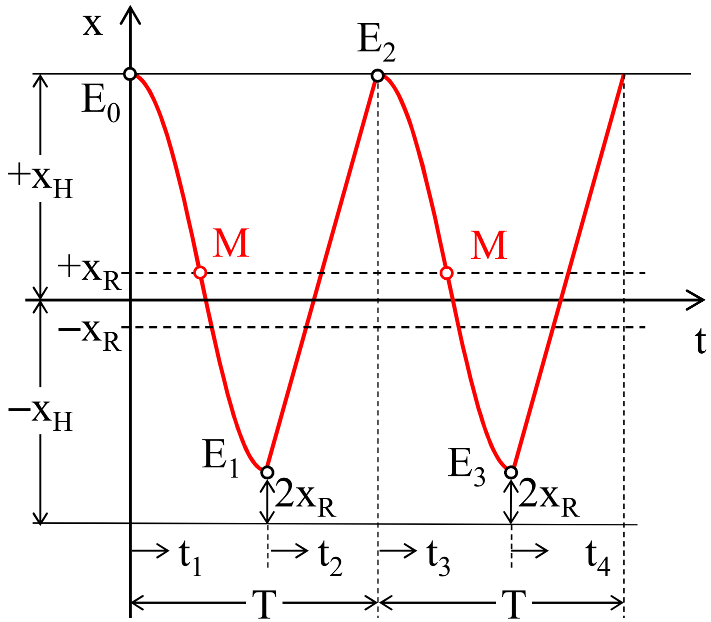
Der Effekt lässt sich am Beispiel eines Feder-Masse-Systems darstellen, bei dem der Körper reibungsbehaftet auf einem Band aufliegt, das mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt wird.



Zunächst haftet der Körper auf dem Band und wird von diesem mitgenommen. Die Feder dehnt sich, bis die Federkraft die Haftkraft übersteigt. Die Masse gleitet ab und bewegt sich in Gegenrichtung. Dadurch wird die Feder entspannt. Aufgrund ihrer Trägheit bewegt sich die Masse ein Stück über den Punkt hinaus, an dem die Federkraft gleich der Reibkraft ist, und kommt dann zur Ruhe. Der Körper haftet und wird wieder vom Band mitgenommen, der Vorgang wiederholt sich.

Die Rückwärtsbewegung entspricht der des Reibungsschwingers, d. h. die Masse führt er eine harmonische Halbschwingung um die Mittellage x_R mit der Amplitude $x_H - x_R$ aus.

Hierbei ist x_R und x_H die Auslenkung der Feder, die der Reibkraft $F_R = c \cdot x_R$ bzw. der Haftkraft $F_H = c \cdot x_H$ entspricht.



Die Vorwärtsbewegung hingegen wird durch die konstante Geschwindigkeit des Bandes bestimmt und verläuft linear. Die Periodendauer ergibt sich aus

$$T = \frac{T_0}{2} + 2 \cdot \frac{x_H - x_R}{v}$$

Der Stick-Slip-Effekt ist in technischen Anwendungen meist unerwünscht. Er erzeugt Lärm und Körperschall und führt zu erhöhtem Verschleiß und Materialermüdung. Er kann durch ausreichende Schmierung vermieden werden.

Der Haftgleiteffekt kann auch benutzt werden, um den Reibkoeffizienten μ zu bestimmen. Betrachtet wird ein Balken, der auf zwei gegenläufig mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Rollen aufliegt.

Das dynamische Gleichgewicht liefert:

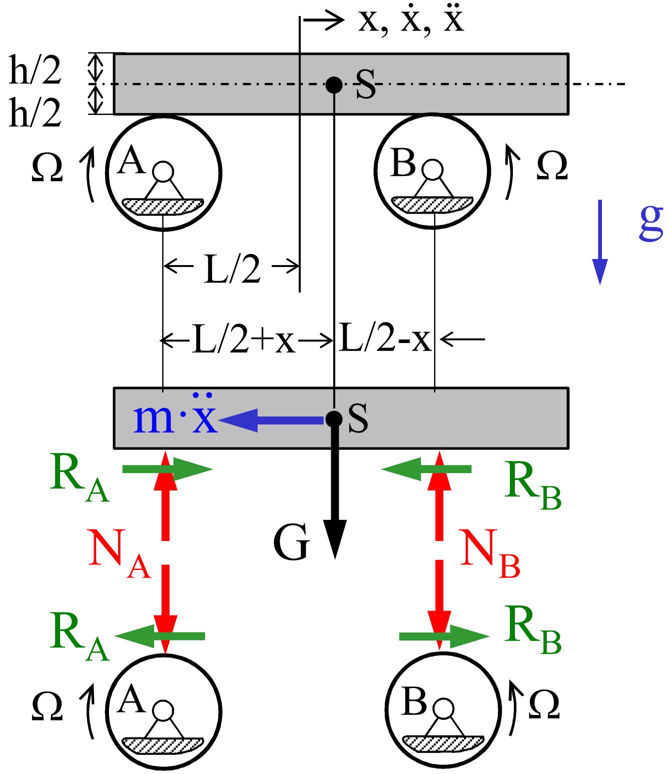
$$\sum F_x = 0 = R_A - m \cdot \ddot{x} - R_B$$

$$\sum M^B = 0 = G \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right) - N_A \cdot L + m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow N_A = G \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) + \frac{1}{2} m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h}{L}$$

$$\sum M^A = 0 = N_B \cdot L - G \cdot \left(\frac{L}{2} + x \right) + m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow N_B = G \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) - \frac{1}{2} m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h}{L}$$



Coulomb´sche Reibung:

$R_A = \mu \cdot N_A$ und $R_B = \mu \cdot N_B$

Einsetzen in das Kräftegleichgewicht ergibt

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2}\mu \cdot m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h}{L} - m \cdot \ddot{x} - \mu \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2}\mu \cdot m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h}{L} = 0$$

Division durch die Masse m und zusammenfassen der Terme liefert

$$\ddot{x} \cdot \left(\frac{\mu \cdot h}{L} - 1\right) + \mu \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mu \cdot h}{L} - 1\right) \cdot \ddot{x} - \frac{2\mu \cdot g}{L} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\mu \cdot h}{L}\right) \cdot \ddot{x} + \frac{2\mu \cdot g}{L} \cdot x = 0 \qquad \Rightarrow \left(\frac{L - \mu \cdot h}{L}\right) \cdot \ddot{x} + \frac{2\mu \cdot g}{L} \cdot x = 0$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung der Balkenbewegung

$$\ddot{x} + \frac{2\mu \cdot g}{L - \mu \cdot h} \cdot x = 0$$

mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2\mu \cdot g}{L - \mu \cdot h}}$$

Die Eigenkreisfrequenz ω_0 ist nur vom Reibkoeffizient μ, von der Höhe h des Balkens und vom Abstand L der Antriebsrollen und abhängig, nicht jedoch von deren Winkelgeschwindigkeit Ω. Mit $\omega_0=2\pi/T_0$ folgt die Periodendauer

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L-\mu \cdot h}{2\mu \cdot g}}$$

Bei bekannter Periodendauer T_0 lässt sich daraus der Reibkoeffizient ermitteln:

$$\mu = \frac{2\pi^2 \cdot L}{g \cdot T_0^2 + 2\pi^2 \cdot h}$$

Für h<<L gilt:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2\mu \cdot g}{L}} \quad \text{und} \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2\mu \cdot g}}$$

Beispiel : Reibschwinger

Gegeben: T = 35 s, h =10 mm, L = 200 mm

Gesucht: μ

4.3 Systeme mit einem Freiheitsgrad

Besitzt ein Einmassenschwinger mehr als eine Bewegungsmöglichkeit oder besteht ein schwingfähiges System aus mehreren Körpern, so können beide Fälle wie ein System mit einem Freiheitsgrad behandelt werden, wenn die auftretenden Bewegungsmöglichkeiten kinematisch starr gekoppelt sind.

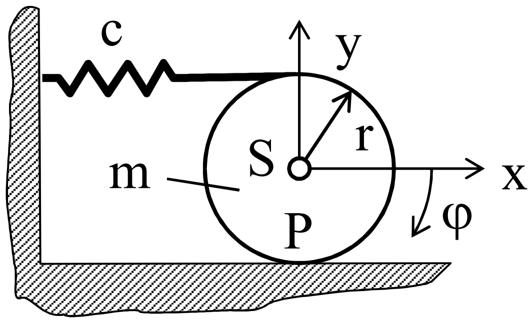
Für die Berechnung ist folgende Vorgehensweise anzuwenden:

1. Einführung eines geeigneten Inertialsystems.
2. Abgrenzen des betrachteten Systems und Zeichnen des Freikörperbildes
3. Eintragen aller auftretenden Kräfte (Lasten, Schnitt-, Reaktions-, Trägheits- und Federkräfte sowie Reibungs- und Haftkräfte)
4. Aufstellen der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der kinematischen Kopplungen und Elimination der inneren Kräfte
5. Bestimmung der Eigenschaften des dynamischen Systems aus dem Dämpfungs- und Steifigkeitsterm der normierten Differentialgleichung $\ddot{x}+2\delta\cdot\dot{x}+\omega^2_0\cdot x = 0$

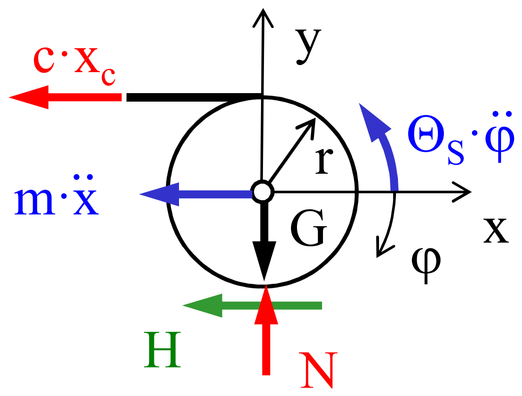
Beispiel 1: Abrollende Walze mit Feder

Gegeben: $m = 10$ kg, $\Theta_S = 0{,}125$ kgm^2, $r = 150$ mm, $c = 1$ N/mm

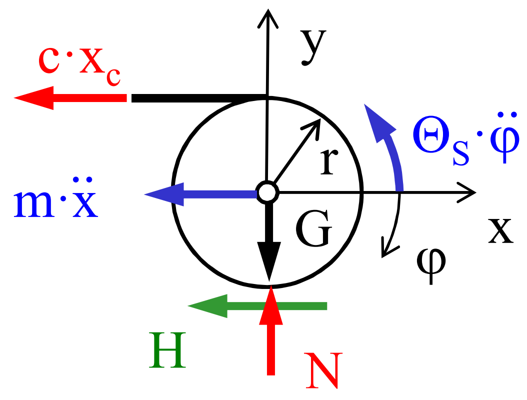
Gesucht: ω_0, f_0, T_0



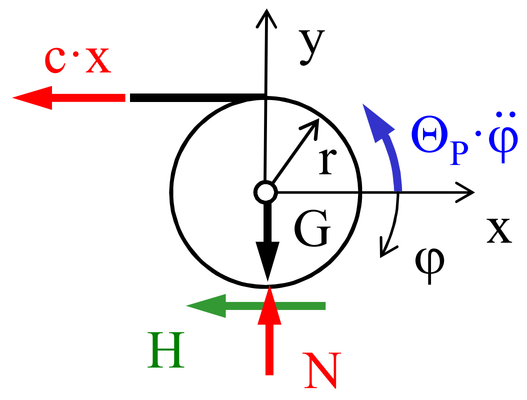
Freikörperbild:



Alternative Berechnung 1:



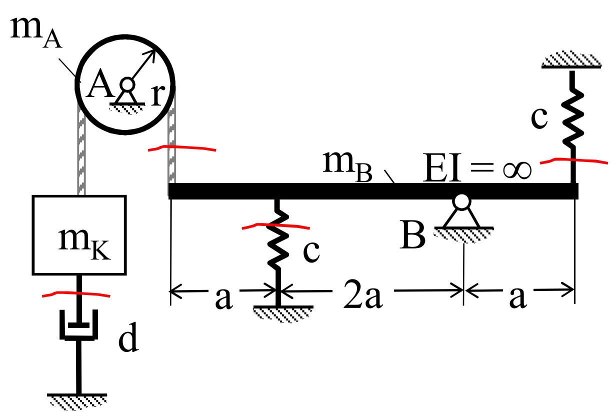
Alternative Berechnung 2:

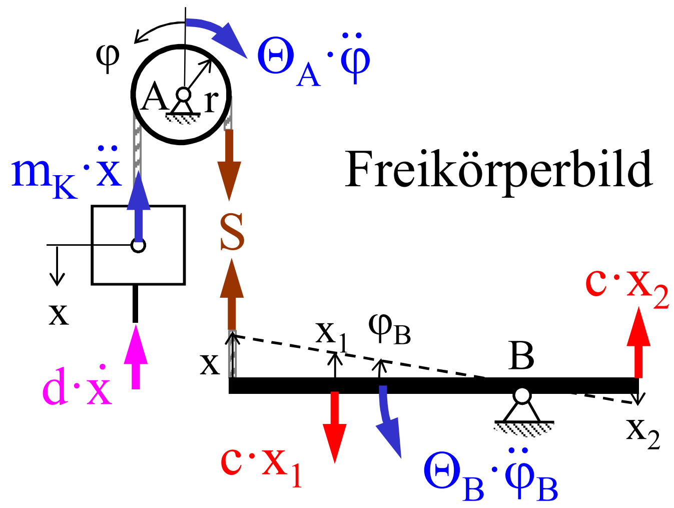


Beispiel 2: Starrer Balken mit Umlenkrolle und Gewicht

Gegeben: $m_K = 4$ kg, $m_A = 2$ kg, $m_B = 3$ kg, $a = 0{,}25$ m, $r = 0{,}1$ m, $c = 10$ N/mm, $d = 100$ kg/s

Gesucht: ω_0, T_0, D, ω, f, T





…. Fortsetzung

Übung: Elastischer Balken mit Umlenkrolle und Gewicht

Gegeben: $m_K = 4$ kg, $\Theta_A = 0{,}1$ kgm^2 , $L = 0{,}5$ m, $r = 0{,}2$ m, $EI = 100$ Nm^2, $d = 50$ kg/s

Gesucht: ω_0, T_0, D, ω, f, T