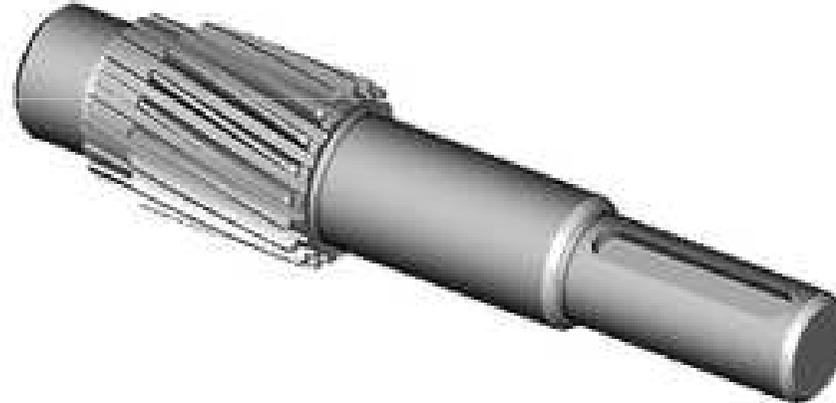


9. Wellenberechnung

In der Praxis unterliegen Bauteile oftmals einer überlagerten Beanspruchung infolge von Längs- und Querkräften, Biege- und Torsionsmomenten. Aus diesen Grundbeanspruchungsarten resultieren unterschiedliche Spannungsarten und Spannungsverteilungen, die bei der Auslegung zu beachten sind.



Zusätzlich muss unterschieden werden zwischen ruhender und wechselnder Beanspruchung, was insbesondere im Bereich von Kerben von Bedeutung ist.

9.1 Ruhende und wechselnde Beanspruchung

Bei umlaufenden Wellen ist die Torsionsbeanspruchung i. allg. konstant, während die Biegespannungen bei jedem Umlauf ihr Vorzeichen wechseln. Der Einfluss wechselnder Beanspruchung auf die Festigkeit der Welle lässt sich durch das Anstrengungsverhältnis

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}}$$

mit $\rho = 2$ für die Schubspannungshypothese (SH) und $\rho = \sqrt{3}$ für die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) berücksichtigen.

Liegen keine weiteren Angaben vor, können bei Stahl die für den wechselnden Lastfall zulässigen Spannungen σ_{zul} und τ_{zul} aus der Zugfestigkeit R_m des Werkstoffs abgeschätzt werden.

Zug-Druck-Wechselfestigkeit: $\sigma_{zul} = \sigma_{zdW} \approx 0,4 \cdot R_m$

Biege-Wechselfestigkeit: $\sigma_{zul} = \sigma_{bW} \approx 0,5 \cdot R_m$

Torsions-Wechselfestigkeit: $\tau_{zul} = \tau_{tW} \approx 0,3 \cdot R_m$

Für den zweiachsigen Spannungszustand auf der Oberfläche einer Welle lautet demnach die Festigkeitsbedingung

$$\sigma_v^{\text{SH}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau_t)^2} \leq S_{\text{zul}}$$

$$\sigma_v^{\text{GEH}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau_t)^2} \leq S_{\text{zul}}$$

Für Stahl gilt näherungsweise:

Biegung wechselnd, Torsion ruhend $\alpha_0 \approx 0,7$

Biegung wechselnd, Torsion wechselnd $\alpha_0 = 1,0$

Biegung ruhend, Torsion wechselnd $\alpha_0 \approx 1,5$

Beispiel: Umlaufende Welle

Gegeben: $\sigma_b = 150 \text{ N/mm}^2$, $\tau_t = 90 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{zul}} = 250 \text{ N/mm}^2$ und $\tau_{\text{zul}} = 195 \text{ N/mm}^2$

Gesucht: Vergleichsspannungen nach GEH

9.2 Wellenauslegung

Für Auslegung umlaufender Wellen gilt nach der Schubspannungshypothese

$$\sigma_v^{SH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot (\alpha_0 \cdot \tau_t)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + 4 \cdot \left(\alpha_0 \frac{T}{W_p}\right)^2} \leq S_{zul}$$

Setzt man die Widerstandsmomente für Kreisquerschnitte

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 2 \cdot W_b$$

ein, erhält man mit

$$\sigma_v^{SH} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + \left(\alpha_0 \frac{T}{W_b}\right)^2} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 T)^2} \leq S_{zul}$$

die Festigkeitsbedingung für die Wellenauslegung

Mit dem Vergleichsmoment nach der Schubspannungshypothese

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 T)^2}$$

ergibt sich

$$\sigma_v^{\text{SH}} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot M_v \leq S_{\text{zul}}$$

Daraus folgt der erforderliche Wellendurchmesser

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_v}{\pi \cdot \sigma_{\text{zul}}}}$$

Für die Gestaltänderungsenergiehypothese ist das Vergleichsmoment

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4} (\alpha_0 T)^2}$$

Bei zweiachsiger Biegung ist das resultierende Biegemoment

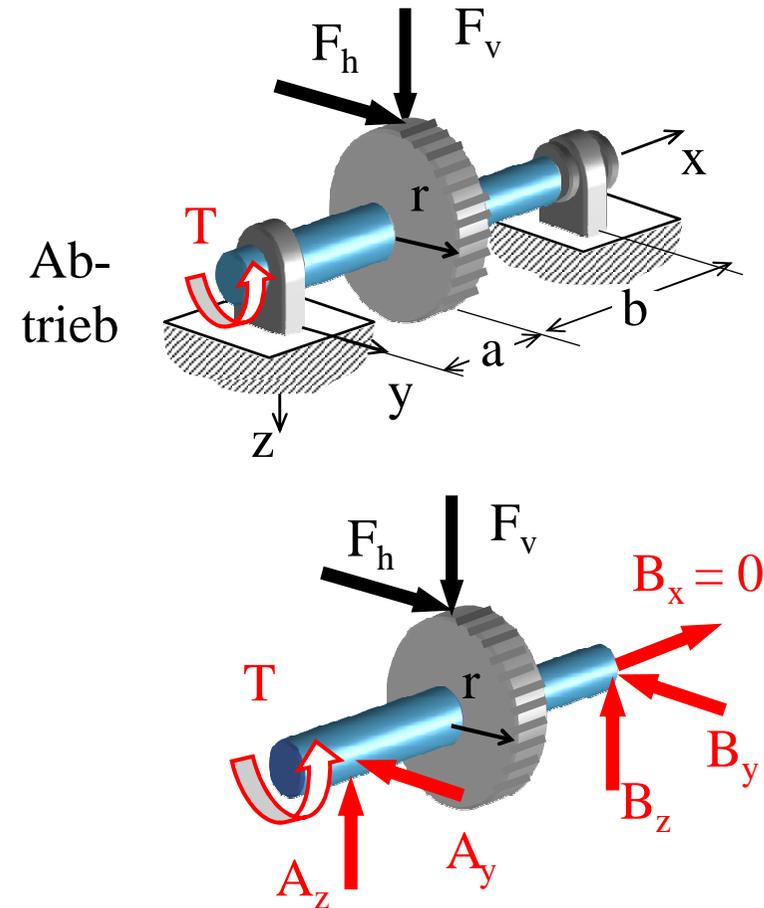
$$M_b = \sqrt{M_{by}^2 + M_{bz}^2}$$

einzusetzen.

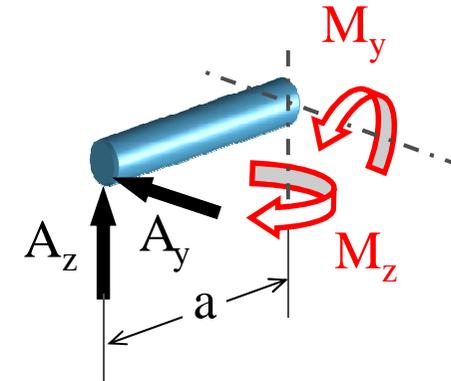
Beispiel: Wellenantrieb

Gegeben: $F_h = 6 \text{ kN}$, $F_v = 3 \text{ kN}$, $a = 100 \text{ mm}$, $b = 150 \text{ mm}$, $r = 50 \text{ mm}$, $\sigma_{zul} = 195 \text{ N/mm}^2$, $\alpha_0 = 0,7$

Gesucht: Erf. Wellendurchmesser nach GEH



...Fortsetzung: Wellenantrieb

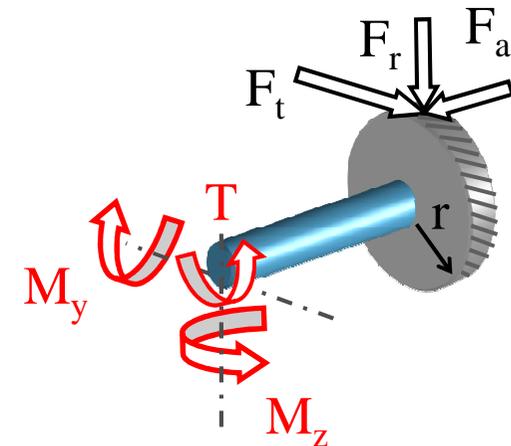
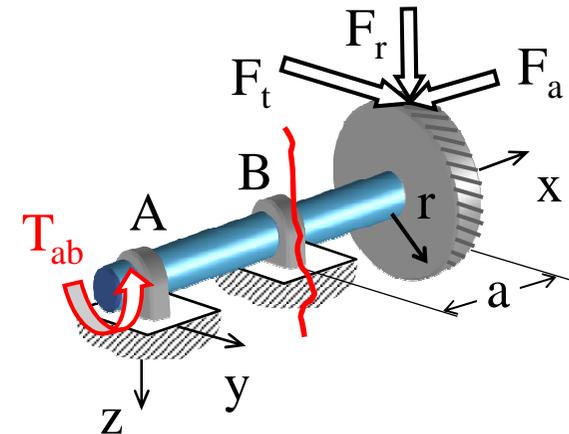




Übung: Schräg verzahnter Wellenantrieb

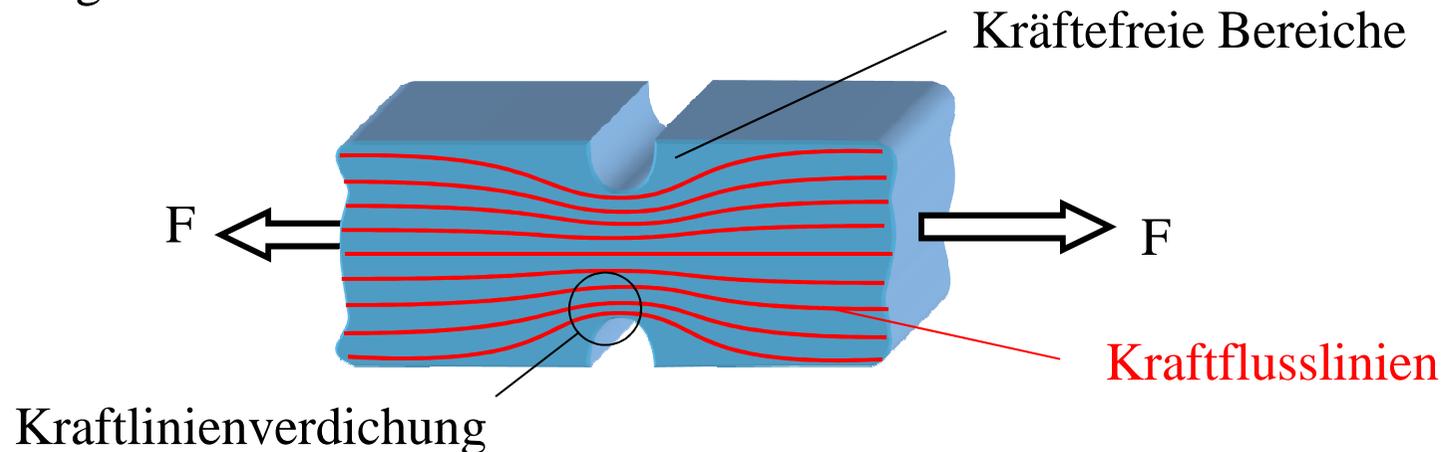
Gegeben: $F_t = 12 \text{ kN}$, $F_r = 4,4 \text{ kN}$, $F_a = 2,1 \text{ kN}$, $a = 150 \text{ mm}$, $r = 100 \text{ mm}$, $\sigma_{zul} = 180 \text{ N/mm}^2$, $\alpha_0 = 0,7$

Gesucht: Erf. Wellendurchmesser nach GEH



9.3 Kerbwirkung

Die Beanspruchung eines Bauteils und ihre Verteilung über dem Querschnitt hängt nicht nur von der Art der Belastung ab, sondern auch von Form des Bauteils. Insbesondere im Bereich konstruktiv bedingter Kerben kommt es örtlich zu Spannungskonzentrationen.

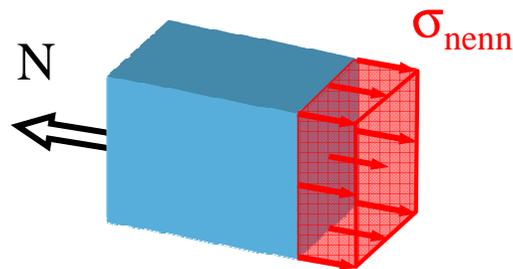


Die Ursache dafür lässt sich anhand des Kraftflusses veranschaulichen. Im Kerbgrund tritt eine Verdichtung der Kraftlinien auf, während benachbarte Bereiche kräftefrei sind. Infolge der Verformungsbehinderung ergeben sich im Kerbgrund Spannungsspitzen, die über den Nennspannungen des ungestörten Bauteils liegen.

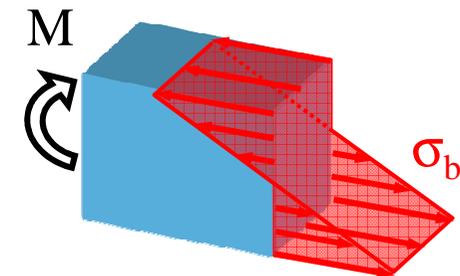
9.3.1 Kerbformzahl

In ungestörten Bereichen eines Bauteils ist die Spannungsverteilung nur von der Belastung abhängig. Die Nennspannungen werden aus den Gleichgewichtsbedingungen gewonnen.

Nennspannung bei Zug/Druck

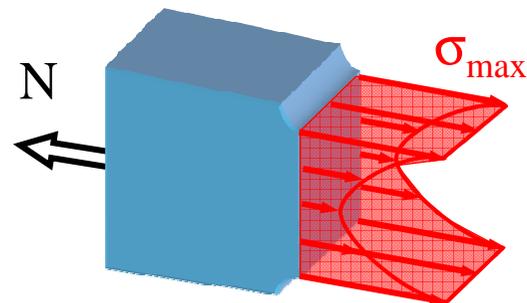


Nennspannung bei Biegung

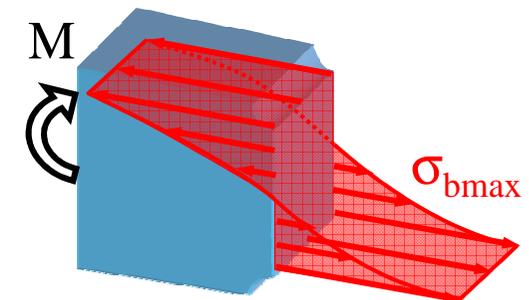


Im Bereich von Kerben treten infolge des gestörten Kraftflusses Spannungsspitzen auf.

Kerbspannung bei Zug/Druck



Kerbspannung bei Biegung



Der tatsächliche Spannungsverlauf im Bereich von Kerben lässt sich nur mit beträchtlichem Aufwand analytisch oder numerisch ermitteln.

Für eine konstruktive Auslegung axial beanspruchter Bauteile wird daher nur das Verhältnis aus der Spannungsspitze und Nennspannung betrachtet:

Zug/Druck:
$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} > 1$$

Die Kerbformzahl α_k ist nur von der Kerbform und der Beanspruchungsart, nicht jedoch von den Werkstoffeigenschaften abhängig. Analog erhält man für die weiteren Beanspruchungsarten

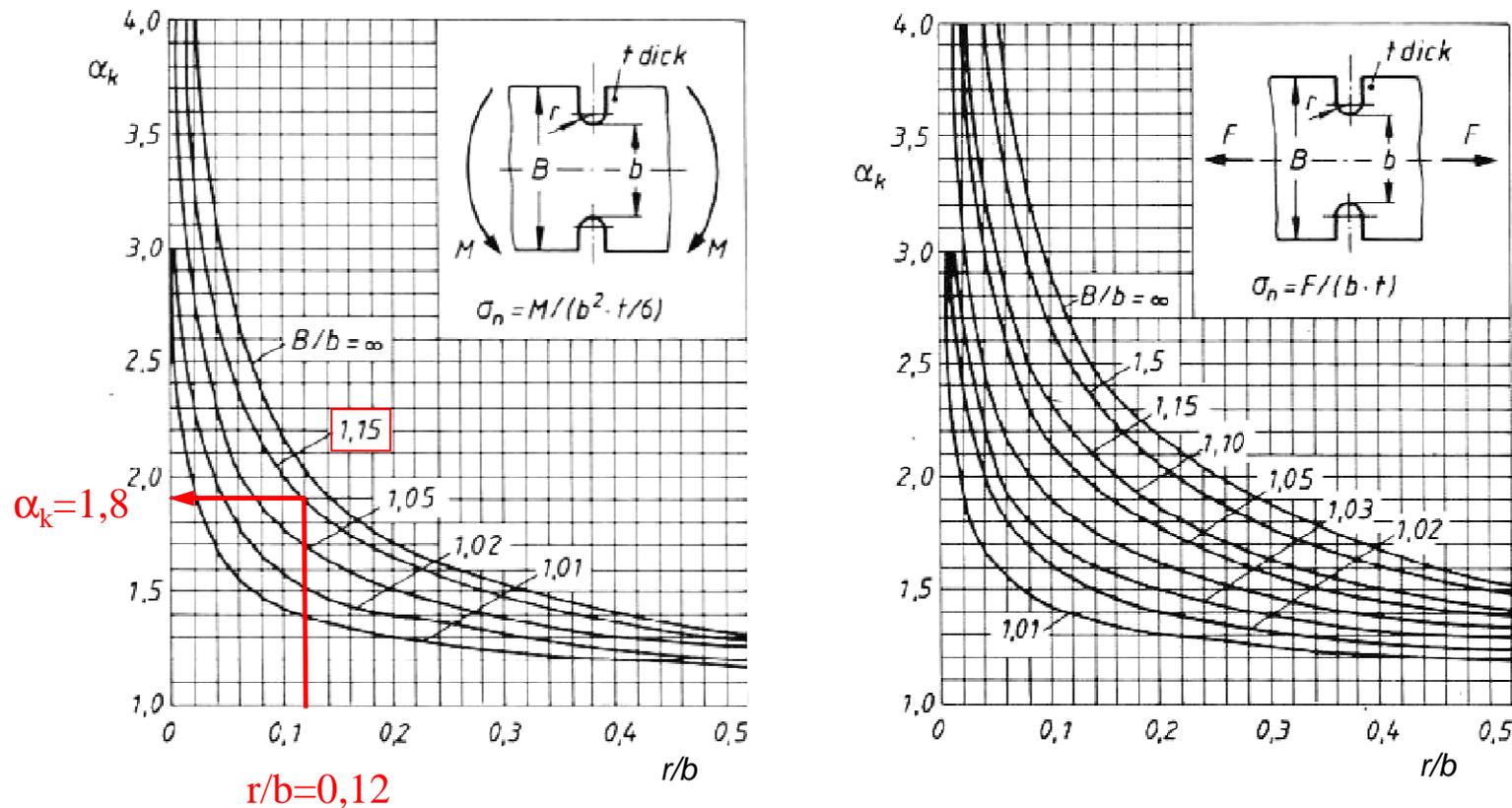
Biegung:
$$\alpha_{kb} = \frac{\sigma_{b\max}}{\sigma_b} > 1$$

Torsion:
$$\alpha_{kt} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_t} > 1$$

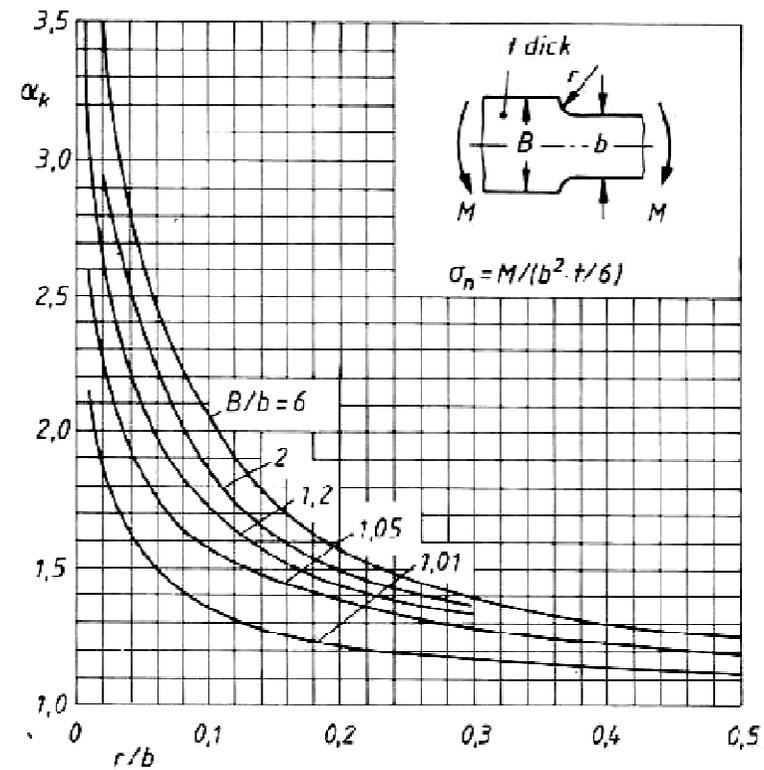
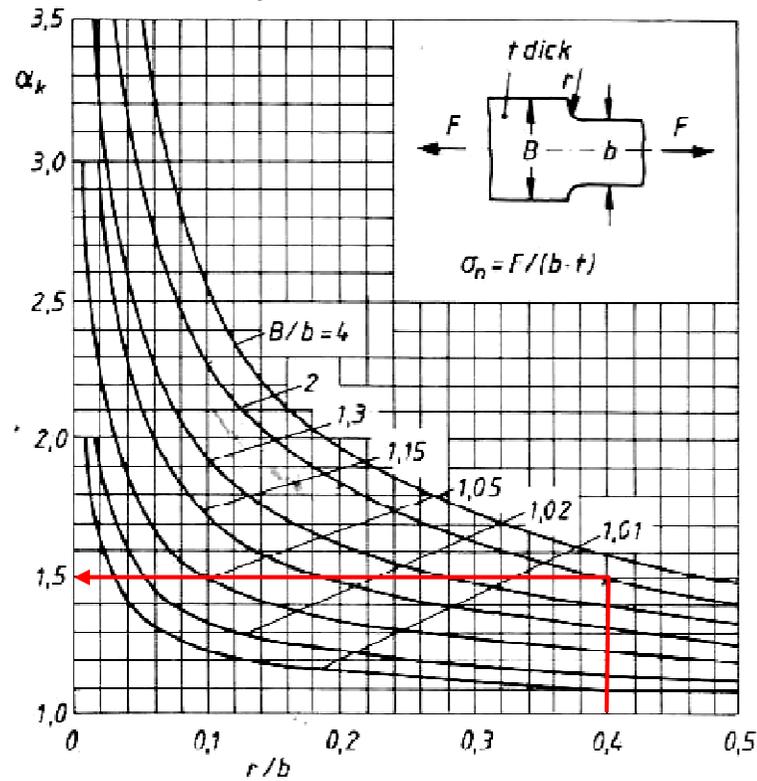
Ist die Kerbformzahl bekannt, lässt sich aus der Nennspannung im kritischen Querschnitt die Spannungsspitze im Kerbgrund berechnen.

Für häufig auftretende Kerbformen lassen sich die Formzahlen aus Diagrammen der Literatur (z. B. Roloff/Matek) entnehmen:

Tab 9.1 Flachstab mit symmetrischer Außenkerbe



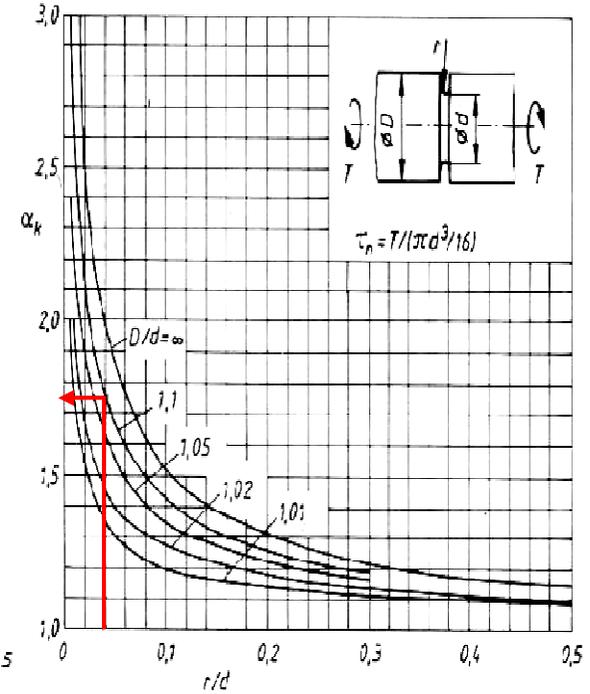
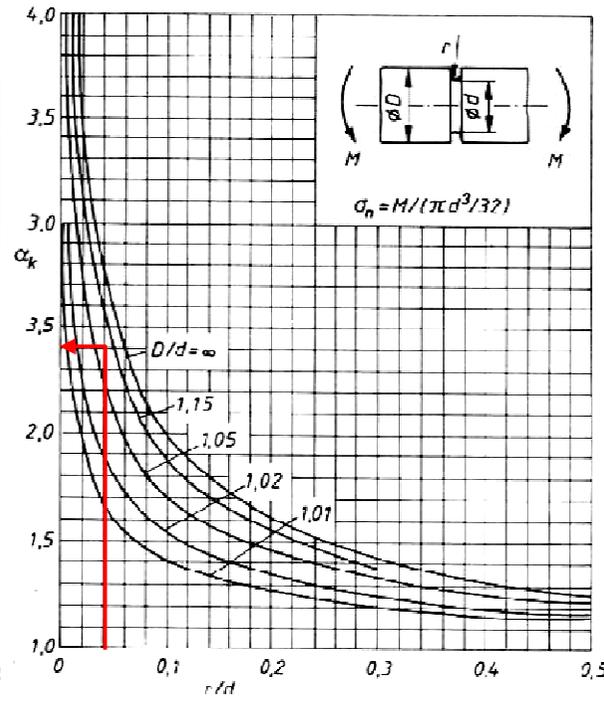
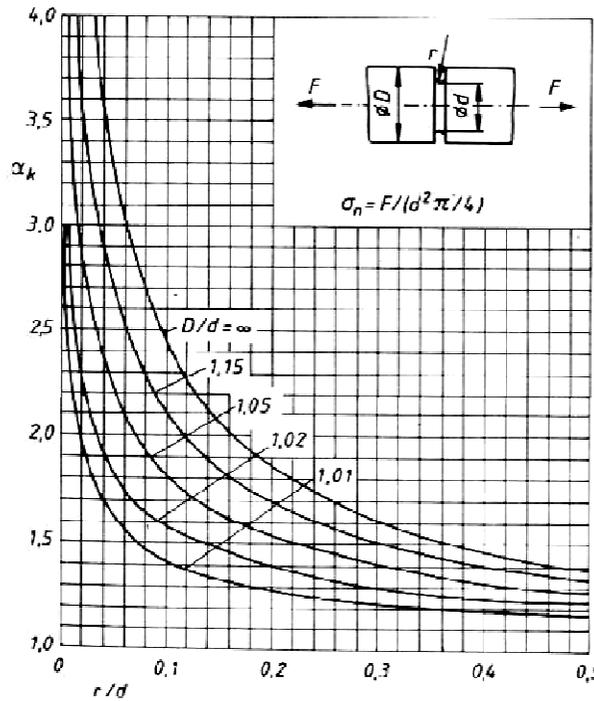
Tab 9.2 Symmetrisch abgesetzter Flachstab



aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente

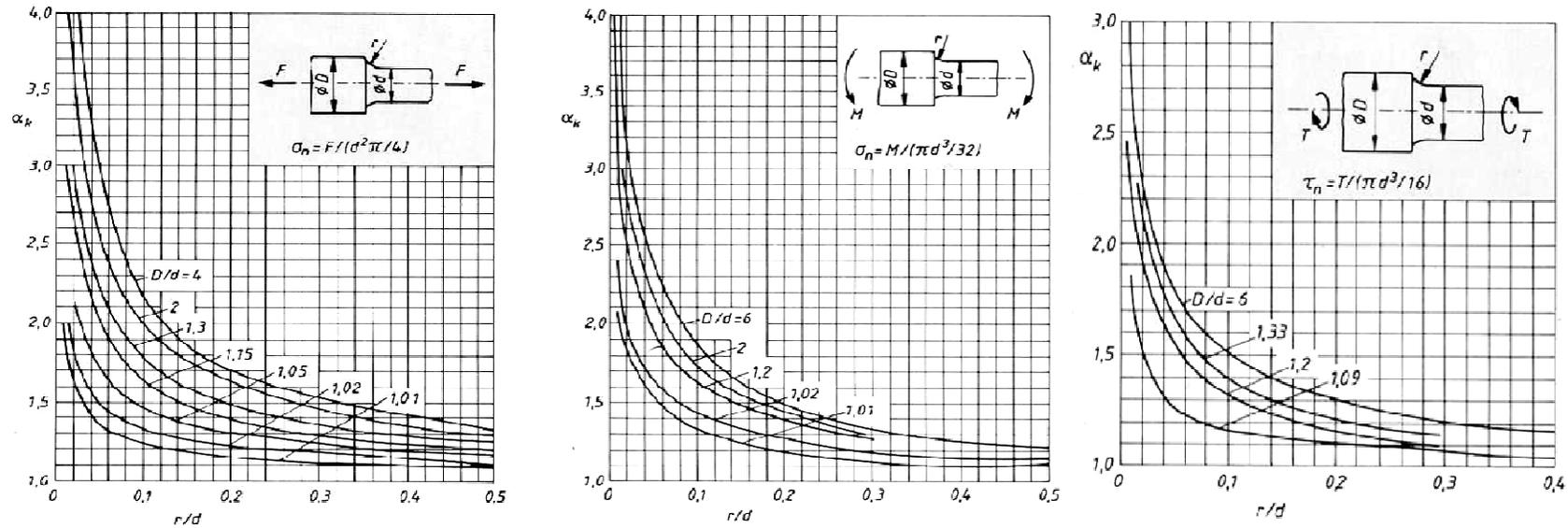


Tab 9.3 Rundstab mit Ringnut

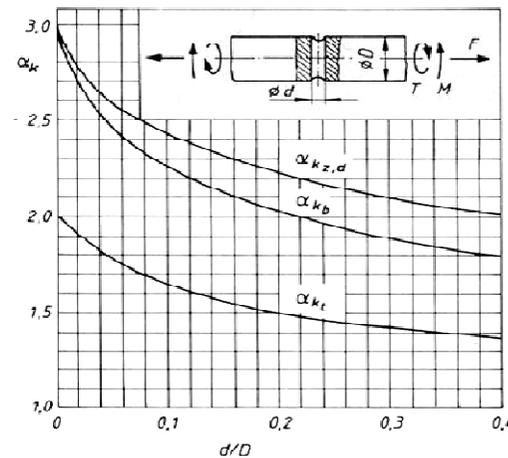


aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente

Tab 9.4 Abgesetzter Rundstab



Tab 9.5 Rundstab mit Querbohrung



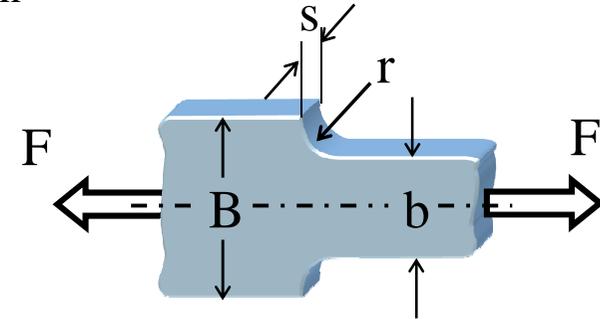
Zug	$\sigma_n = F / [(\pi D^2 / 4) - (d \cdot D)]$
Biegung	$\sigma_n = M / [(\pi D^3 / 32) - (d \cdot D^2 / 6)]$
Torsion	$\tau_n = T / [(\pi D^3 / 16) - (d \cdot D^2 / 6)]$

aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente

Beispiel: Abgesetzter Flachstab unter Zugbeanspruchung

Gegeben: $F = 15 \text{ kN}$, $b = 20 \text{ mm}$, $B = 40 \text{ mm}$, $r = 8 \text{ mm}$, $s = 10 \text{ mm}$

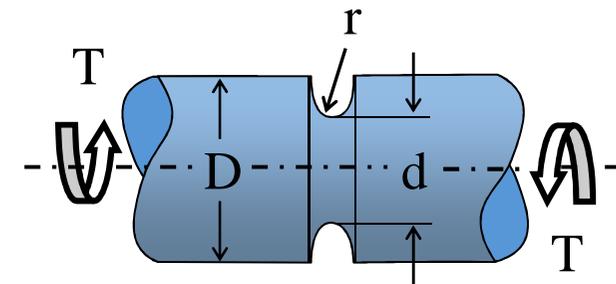
Gesucht: Kerbspannung



Übung: Welle mit Ringnut unter Torsion

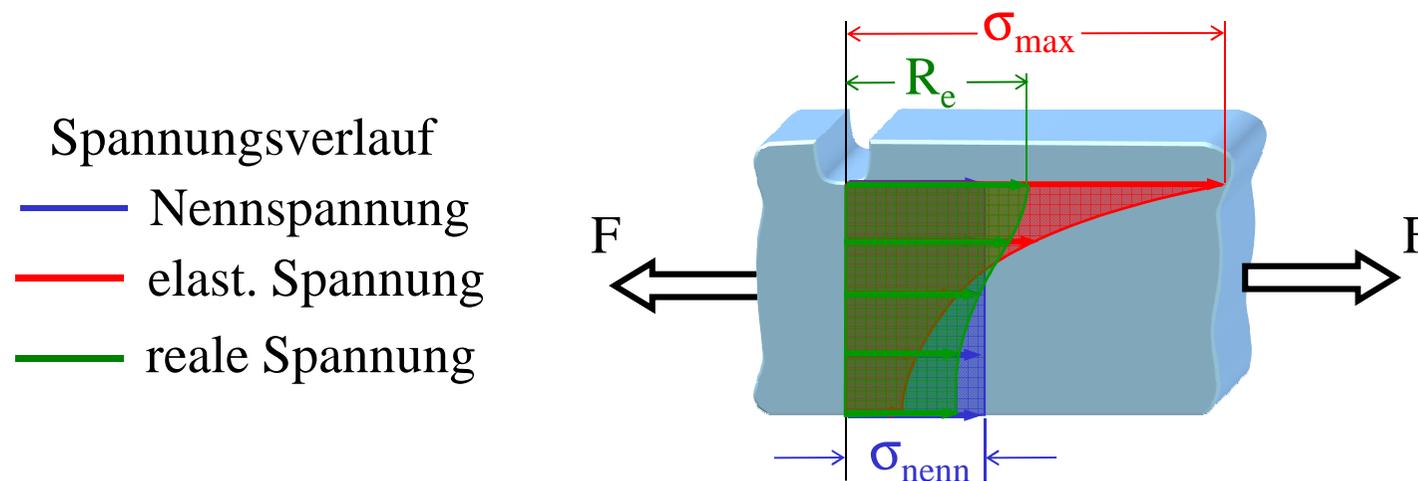
Gegeben: $T = 1 \text{ kNm}$, $D = 55 \text{ mm}$, $d = 50 \text{ mm}$, $r = 2 \text{ mm}$

Gesucht: Kerbspannung



Solange die max. Kerbspannung σ_{\max} kleiner als die Streckgrenze R_e des Werkstoffs ist, bleiben die Spannungsspitzen in voller Höhe erhalten.

Wird die Streckgrenze überschritten, kommt es im Kerbgrund durch örtliches plastisches Fließen zum Spannungsabbau.



Durch die Stützwirkung benachbarter Werkstoffbereiche wird die Spannung auf die Streckgrenze begrenzt. Bei zähen Werkstoffen unter ruhender Beanspruchung bleibt daher die Kerbwirkung unberücksichtigt.

Bei spröden Werkstoffen darf die max. Kerbspannung die Kerbzugfestigkeit nicht überschreiten, da hier ein Spannungsabbau nicht erfolgt.

9.3.2 Kerbwirkungszahl

Im Gegensatz zu ruhender Beanspruchung kann es bei wechselnder Beanspruchung durch das begrenzte Formänderungsvermögen zu keinem dauerhaften Spannungsabbau kommen. Man beobachtet auch bei zähen Werkstoffen eine Abnahme der Dauerfestigkeit gekerbter Bauteile gegenüber einem glatten Probestab.

Zur Auslegung dynamisch beanspruchter Bauteile wird daher die Kerbwirkungszahl β_k als Verhältnis der Dauerfestigkeit S_D eines glatten, polierten Stabes zur Dauerfestigkeit S_{Dk} der gekerbten Probe herangezogen

$$\beta_k = \frac{S_D}{S_{Dk}} > 1$$

Die Kerbwirkungszahl β_k ist abhängig von der Beanspruchungsart, der Kerbform sowie vom Werkstoff und wird experimentell ermittelt. Bei vollkommen kerbempfindlichen (spröden) Werkstoffen erreicht die Kerbwirkungszahl β_k den Wert der Kerbformzahl α_k .

$$1 < \beta_k \leq \alpha_k$$

Zwischen Kerbwirkungszahl β_k und Kerbformzahl α_k lässt sich nach Thum ein empirischer Zusammenhang herstellen. Es gilt näherungsweise

$$\beta_k \approx 1 + \eta_k \cdot (\alpha_k - 1)$$

mit der Stützziffer

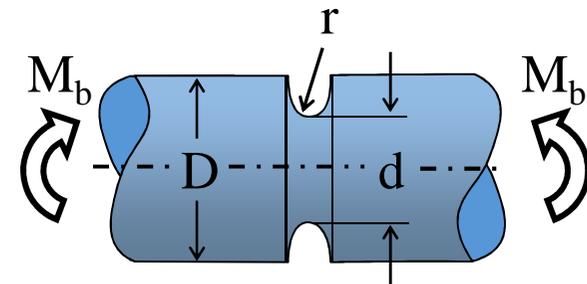
$$\eta_k = \frac{1}{1 + \frac{8}{r} \cdot \left(1 - \frac{R_{p0,2}}{R_m}\right)^3}$$

und dem Kerbradius r sowie der Zugfestigkeit R_m und der Dehngrenze $R_{p0,2}$.

Beispiel: Welle aus Ck22 mit Ringnut unter Biegung

Gegeben: $r = 2 \text{ mm}$, $\alpha_k = 2,4$, $R_m = 420 \text{ N/mm}^2$, $R_{p0,2} = 220 \text{ N/mm}^2$

Gesucht: Kerbwirkungszahl



Tab 20.6 Anhaltswerte der Kerbwirkungszahl β_k für häufig vorkommende Bauteile.

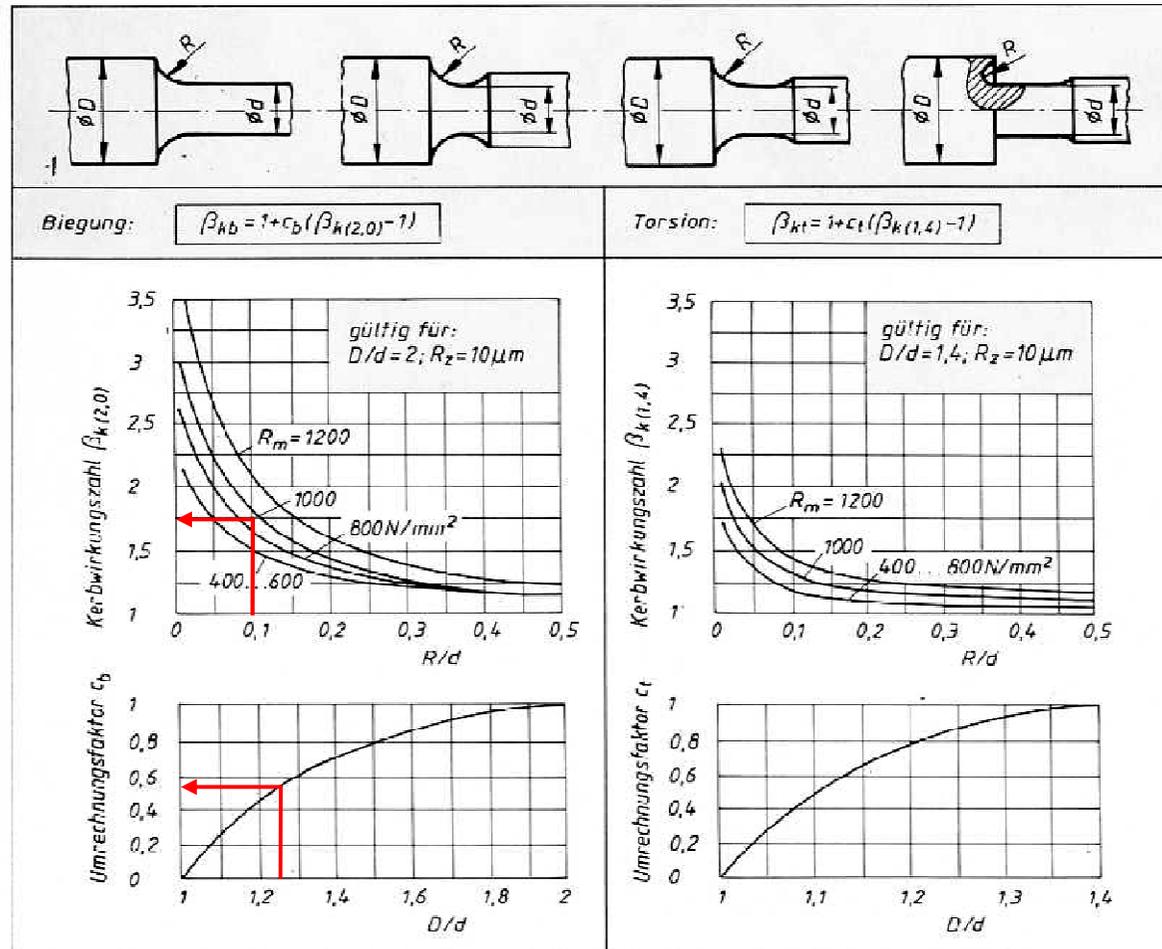
	Kerbform	R_m (N/mm ²)	β_{kb}	β_{kt}
1.	Hinterdrehung in Welle (Rundkerbe) ²⁾	300–800	1,2–1,8	1,1–2,0
2.	Eindrehung für Sicherungsring in Welle	300–800	2,0–3,5	2,2–3,0
3.	Abgesetzte Welle (Lagerzapfen) ²⁾	300–1200	1,2–3,0	1,1–2,0
4.	Querbohrung (Rundstab, $d/D \approx 0,15 \dots 0,5$)	300–1200	1,3–2,0	1,2–2,1
5.	Paßfedernut in Welle (Schaftfräser) ²⁾	300–1200	1,8–2,5	1,5–2,0
6.	Paßfedernut in Welle (Scheibenfräser) ²⁾	300–1200	1,6–2,3	1,4–1,8
7.	Keilwelle (parallele Flanken)	300–1200	1,6–2,2	1,4–1,8
8.	Keilwelle (Evolventen-Flanken)	300–1200	1,1–1,8	1,1–1,6
9.	Kerbzahnwellen	300–1200	1,1–1,6	1,1–1,9
10.	Preßverband	400–800	1,8–2,5	1,2–1,6
11.	Kegelspannringe	600	1,6	1,4

²⁾ Genauere Werte nach Tab 20.7 und 20.8

aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente

Tab 9.7 Abgesetzte Rundstäbe

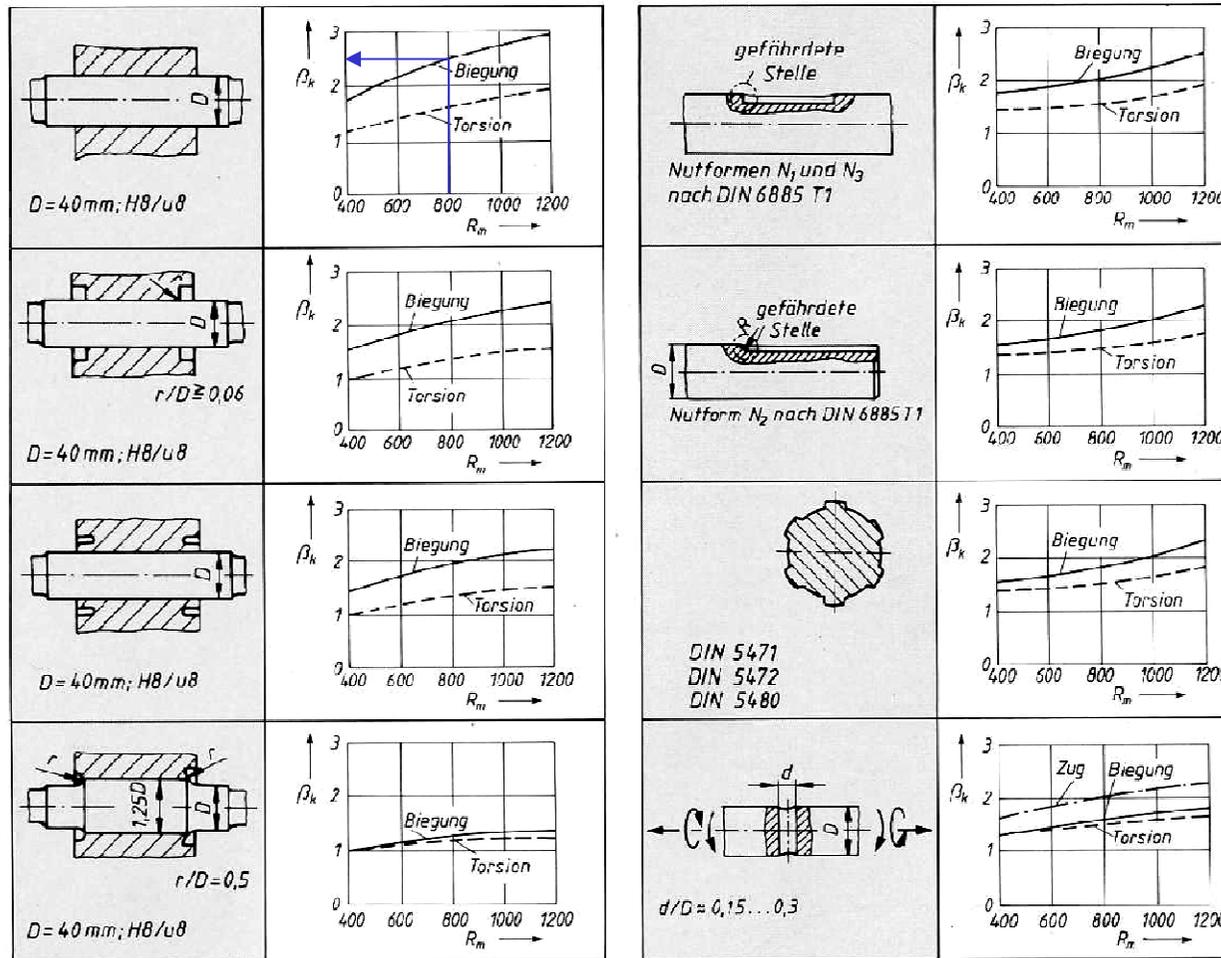
aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente





Tab 9.8 Welle-Nabe-Verbindungen

aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente



9.4 Gestaltfestigkeit

Die Dauerfestigkeit hängt zusätzlich zur Kerbgeometrie noch von der Oberflächengüte und der Bauteilgröße ab. Werden diese Einflüsse berücksichtigt, spricht man von der Gestaltfestigkeit eines dynamisch beanspruchten Bauteils.

Der dauerfestigkeitsmindernde Einfluss der Oberflächenrauheit wird durch den Oberflächenbeiwert b_1 berücksichtigt. Der Einfluss der Bauteilgröße wird unterteilt in den geometrischen, technologischen und formzahlabhängigen Größenfaktor

$$b_2 = k_g \cdot k_t \cdot k_\alpha$$

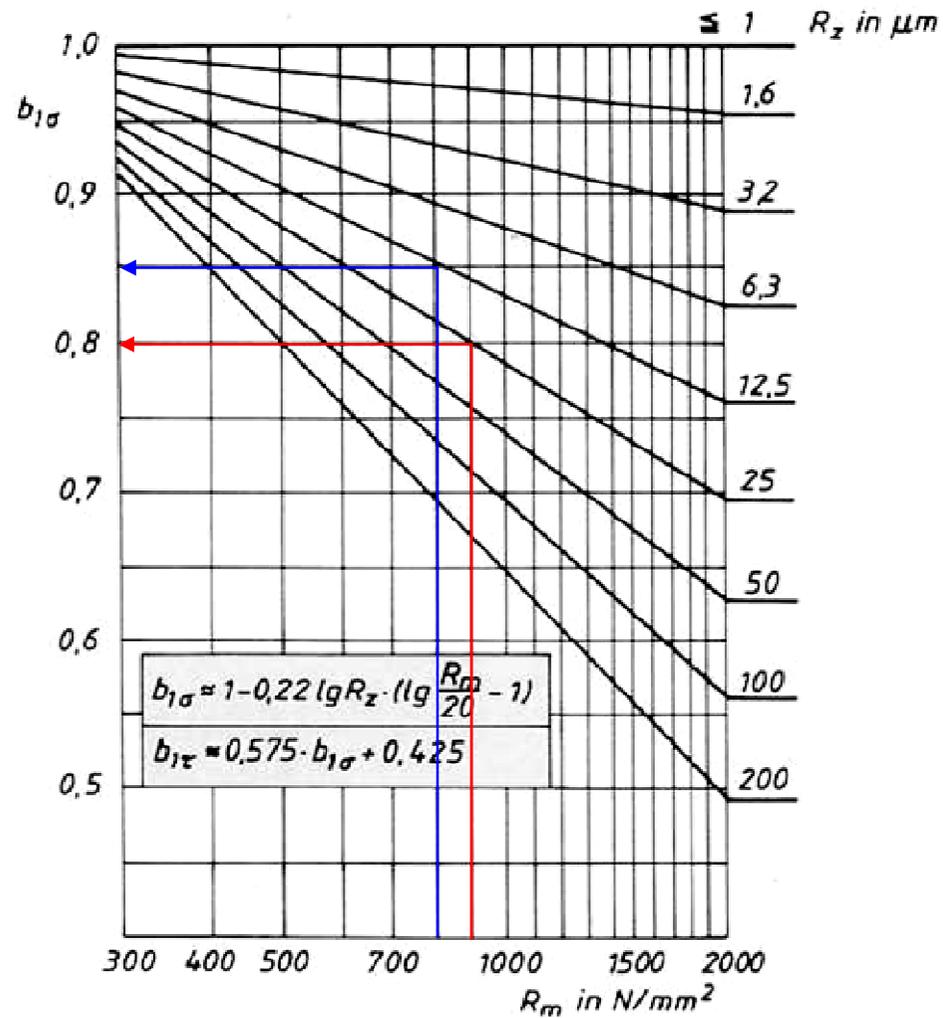
Mit der Kerbwirkungszahl β_k und den Beiwerten b_1 und b_2 ergibt sich die zulässige Spannung S_{zul} aus der Dauerfestigkeit S_D mit dem Sicherheitsfaktor f_s aus

$$S_{zul} = \frac{S_D \cdot b_1 \cdot b_2}{\beta_k \cdot f_s}$$

wobei die Sicherheit gegen Dauerbruch in Abhängigkeit vom Wartungsaufwand und Schadensfolgen mit $1,2 < f_s \leq 2$ an zu setzen ist.



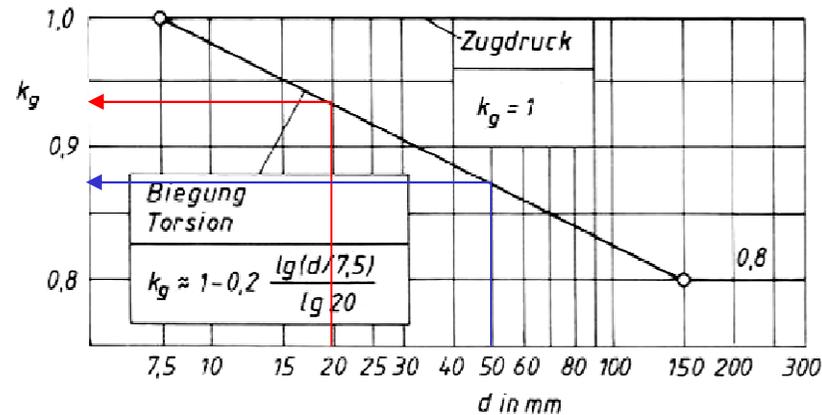
Tab 9.9 Oberflächenbeiwert



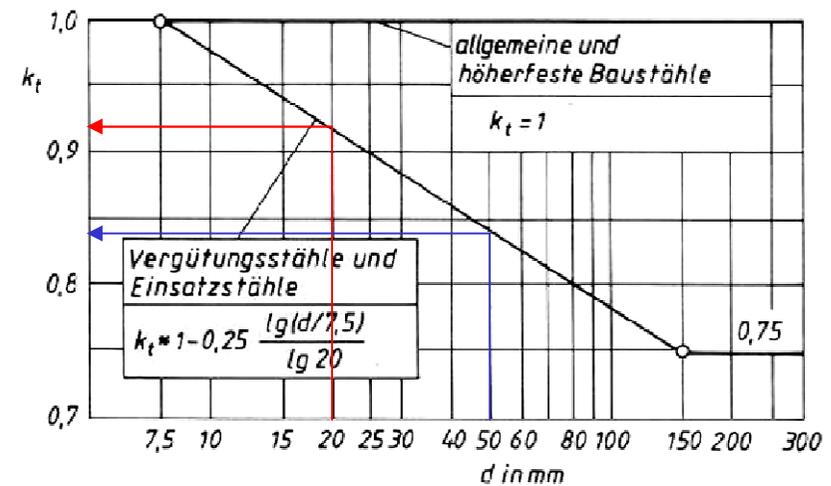
aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente

Tab 9.10 Größenfaktoren

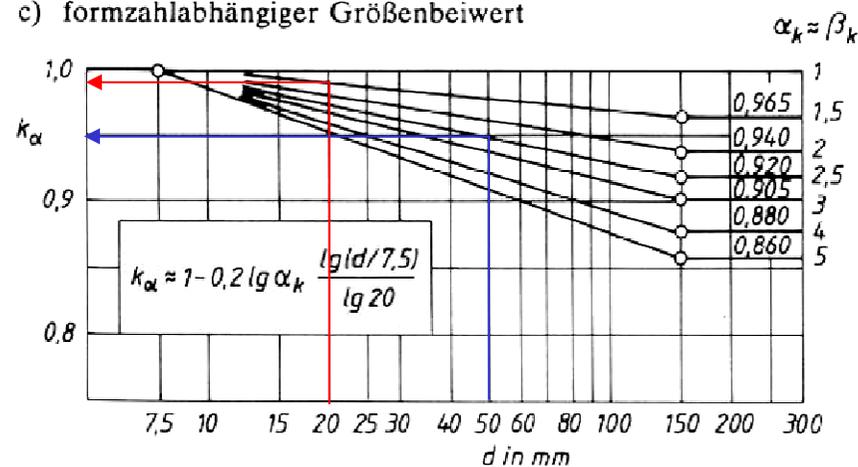
a) geometrischer Größenbeiwert



b) technologischer Größenbeiwert



c) formzahlabhängiger Größenbeiwert



Größenbeiwert:

$$b_2 = k_g \cdot k_t \cdot k_\alpha$$

aus: Roloff/Matek: Maschinenelemente

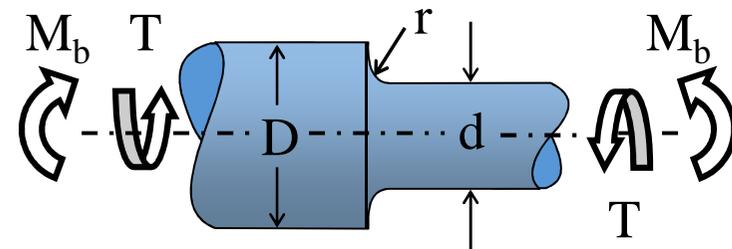


Beispiel: Abgesetzter Welle aus 35CrMo4 unter Biegung und Torsion

Gegeben: $T = 100 \text{ Nm}$, $M_b = 60 \text{ Nm}$, $D = 25 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $r = 2 \text{ mm}$, $f_S = 1,2$

$\alpha_0 = 0,7$, $R_m = 900 \text{ N/mm}^2$, $S_D = 290 \text{ N/mm}^2$, $R_z = 25 \text{ }\mu\text{m}$

Gesucht: Vergleichsspannung und Auslastungsgrad gegen Dauerbruch





Beispiel: Welle mit aufgeschrumpftem Zahnrad

Gegeben: $F_h = 12 \text{ kN}$, $F_v = 4 \text{ kN}$, $a = 100 \text{ mm}$, $d = 50 \text{ mm}$, $r = 50 \text{ mm}$, $f_s = 1,2$
 $R_m = 800 \text{ N/mm}^2$, $S_D = 300 \text{ N/mm}^2$, $\alpha_0 = 0,7$, $R_z = 12,5 \text{ }\mu\text{m}$

Gesucht: Vergleichsspannung nach GEH Ausnutzung gegen Dauerbruch

